University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Représentations géométriques des nombres complexes : Quelles difficultés ? Quels avantages ?

LEQUEUX, Sarah

Award date:
2015

Awarding institution:
Universite de Namur

UNIVERSITÉ DE NAMUR
Faculté des Sciences

Représentations géométriques des nombres complexes : Quelles difficultés ? Quels avantages ?

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « sciences mathématiques, à finalité didactique »

Sarah LEQUEUX

Juin 2015

UNIVERSITÉ DE NAMUR
Faculté des Sciences

Représentations géométriques des nombres complexes : Quelles difficultés ? Quels avantages ?

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « sciences mathématiques, à finalité didactique »

Sarah LEQUEUX
Promotrice : De Vleeschouwer Martine

Juin 2015

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma promotrice, Madame Martine De Vleeschouwer, pour l'aide qu'elle m'a apportée tout au long de ce mémoire. Son soutien, sa disponibilité et ses conseils judicieux m'ont été très précieux.

J'adresse mes sincères remerciements à Madame Chantal Gérard et à Madame Carine Dardenne pour leur patience à lire et à corriger ce travail ainsi qu'à Madame Élodie Keysers pour la partie en anglais.

Je souhaite remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je remercie mes parents, ma famille et mes amis pour leur soutien et leur présence tout au long de ce mémoire et de mes études.

Résumé

À la suite de la constatation des nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants face aux nombres complexes, ce mémoire a pour objectif de fournir des pistes afin d'améliorer l'enseignement et la compréhension de ces nombres chez les étudiants. Pour y parvenir, nous effectuons diverses analyses en suivant la transposition didactique de Chevallard (savoir savant → savoir à enseigner → savoir enseigné → *savoir appris*). En premier lieu, nous retraçons l'histoire de l'apparition des nombres complexes et de leurs représentations géométriques. Cette analyse à caractère épistémologique nous permet de mettre en lumière les obstacles liés à l'acceptation de ces nombres comme entité mathématique dans le savoir savant. Nous présenterons ensuite différents cadres théoriques dans la perspective d'analyses futures. En se basant sur ces éléments théoriques, nous avons examiné, tout d'abord, le savoir à enseigner/savoir enseigné aux étudiants de premier bachelier en Sciences Biologiques, Géologiques et Géographiques de l'année académique 2012-2013. Par la suite, nous étudions une partie du savoir appris par ces étudiants ainsi que leurs difficultés face aux nombres complexes en analysant deux questions de l'examen proposé en juin 2013. Ces analyses nous permettent de dégager des pistes améliorant l'enseignement de ces nombres. Elles permettent également, sur base de ces pistes, de proposer une mise à jour du chapitre sur les nombres complexes du syllabus des cours préparatoires en mathématiques destinés aux étudiants de mathématiques et de physique à l'université de Namur.

Mots clés : nombres complexes, représentations géométriques, cadres, registres, difficultés.

Abstract

Following to many difficulties encountered by students with complex numbers, the objective of this work is to provide avenues to improve the teaching and the understanding of these numbers by students. To achieve this, we do various analyses in following the Chevallard's didactic transposition (knowledge produced $\rightarrow$ knowledge to be taught $\rightarrow$ knowledge taught $\rightarrow$ knowledge learned). At first, we relate the history of the emergence of complex number and their geometric representation. With this epistemological character analysis, we can understand the obstacles related to the acceptance of the complex number as a mathematical entity in the mathematical knowledge. Then, we describe different theoretical frameworks for the future analyses. Bases on these frameworks, we first examine the knowledge to be taught/knowledge taught to first bachelor's students of biological, Geological and Geographical sciences in the 2012-2013 academic year. After that, we study a part of the knowledge learned by these students and their difficulties with complex number by analyzing two questions of the exam proposed in June 2013. Thanks to these various analyses, it's possible to bring to light some solutions to promote the teaching of complex numbers. Based on these solutions, we also can suggest a updating of the chapter « complex numbers » of the preparatory courses syllabus in mathematics for students in mathematics and physics at the University of Namur.

Keywords : complex numbers, geometric representations, frames, registers, difficulties.

Table des matières

Introduction

Dans l'histoire des mathématiques, les nombres complexes sont apparus relativement récemment. De nos jours, l'enseignement de ces nombres pose encore quelques problèmes à certains étudiants que ce soit dans le domaine de la compréhension et/ou de la représentation géométrique de ces nombres. Dans ce mémoire, nous allons nous concentrer principalement sur les difficultés liées aux représentations géométriques chez les étudiants universitaires en science de la vie (biologie, géologie et géographie).

L'objectif de ce mémoire est ainsi de relever et de comprendre les difficultés inhérentes à la manipulation et à la représentation géométrique des nombres complexes chez ces étudiants.

La méthodologie choisie pour y parvenir est de se baser sur la transposition didactique (se référer à la FIGURE 2.1) de Chevallard ([2], pp. 1-3). Cette transposition comporte le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné, auxquels nous rajoutons le savoir appris.

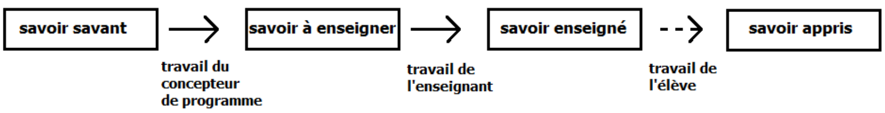


FIGURE 1 – Transposition didactique

Afin de suivre le cheminement de la transposition didactique de Chevallard, nous débuterons ce travail en effectuant une analyse à caractère épistémologique, dans le premier chapitre de ce mémoire, qui permet de comprendre comment les nombres complexes sont apparus dans le savoir savant. Cette analyse relate l'apparition des nombres complexes dans le savoir savant ainsi que les difficultés liées à l'utilisation de ces nombres et à l'apparition de leurs représentations géométriques. Sur base des éléments mis en avant, nous tentons de répondre aux deux questions de recherche suivantes :

- Les représentations géométriques des nombres complexes ont-elles joué un rôle important dans l'acceptation de ces nombres dans la communauté mathématique ?

- Historiquement, les nombres complexes sont-ils apparus sous le statut « objet » ou « outil » (au sens de Douady) ? Les représentations géométriques ont-elles joué un rôle important pour le passage de l'un à l'autre statut (« objet », « outil ») ?

Dans le but d'analyser les trois derniers savoirs de la transposition didactique, nous étudions différents cadres théoriques, à savoir les *cadres* de Douady [3], les *registres de représentations sémiotiques* de Duval [4] et les *organisations mathématiques* de Chevallard [2] et [10], dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre permet, quant à lui, de réaliser une analyse du savoir à enseigner/savoir enseigné fourni au premier bachelier en Sciences Biologiques, Géologiques et Géographiques de l'année académique 2012-2013 à l'université de Namur.

Il est également nécessaire de porter un regard sur la compréhension des nombres complexes par ces étudiants et sur les difficultés qu'ils éprouvent par rapport à cette notion. Par conséquence, le quatrième chapitre présente une analyse d'une partie du savoir appris, par ces étudiants, à l'aide de questions d'examens proposées en juin 2013. Cette étude nous permet de mettre en évidence diverses difficultés éprouvées par ces étudiants, nous donne des pistes pour l'amélioration de la présentation (en classe) des nombres complexes et permet également de répondre aux questions de recherche suivantes :

- Ces étudiants changent-ils facilement de cadres et de registres ?

- Ces étudiants choisissent-ils un cadre et un registre adaptés aux tâches proposées ?

En nous basant sur les différentes analyses réalisées et les résultats obtenus, nous proposons un enseignement qui, selon nous, permet de susciter une plus grande compréhension chez les étudiants. En particulier, nous nous attardons sur la mise à jour du chapitre des nombres complexes du syllabus des cours préparatoires en mathématiques destinés aux étudiants de mathématiques et de physique à l'université de Namur.

Nous concluons en proposant, également, des perspectives à développer.

Le lecteur intéressé par un rappel de la notion des nombres complexes peut prendre connaissance du cours que nous avons modifié au chapitre 5 (à partir de la page 73) ou du cours non modifié à l'annexe 1 (à partir de la page 144).

Première partie

Problématique

Chapitre 1

Émergence des nombres complexes dans le savoir savant

De nos jours, les nombres complexes sont acceptés en tant qu'entité mathématique dans le savoir savant. Cependant, cela n'a pas toujours été le cas. Ce premier chapitre est consacré à l'émergence des nombres complexes dans le savoir mathématique, en détaillant les découvertes apportées entre le XVI^{e} siècle et le XVIII^{e} siècle. Ensuite, nous nous attardons sur l'apparition des différentes représentations géométriques de ces nombres apparues entre le XVII^{e} siècle et le XIX^{e} siècle. Ainsi, ce chapitre permet de présenter les obstacles rencontrés et les « étapes » suivies par les nombres complexes afin de devenir objet dans le savoir savant (au sens de Chevallard [13]) . La rédaction de ce chapitre est principalement inspiré du livre de Dominique Flament, intitulé *Histoire des nombres complexes* [5].

Afin de faciliter la lecture de ce chapitre, fixons-nous préalablement la convention : une expression mathématique se trouvant entre deux « § » signifie qu'elle a été utilisée par la personne citée auparavant. Par exemple, lorsque nous écrivons § $\sqrt{-1}$ § en parlant de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) cela signifie que d'Alembert utilise l'expression $\sqrt{-1}$ dans ses écrits.

1.1 Émergence des nombres complexes

1.1.1 Avant le XVI^{e} siècle

Avant le XVI^{e} siècle, les nombres complexes (initialement appelés nombres imaginaires) ne font pas partie du savoir mathématique car l'utilité de ces nombres ne s'est pas encore faite ressentir. Remarquons qu'à cette époque, les nombres existant dans le savoir mathématique sont ceux que l'on peut visualiser. Par exemple, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est accepté puisqu'il possède une représentation géométrique, étant la diagonale d'un carré dont la longueur des cotés vaut 1. En conclusion, avant le XVI^e siècle, les nombres possédant une représentation géométrique sont ceux qui sont acceptés par le mathématicien, comme Pythagore.

1.1.2 XVI^e siècle

La recherche de vocabulaire et la fixation de notations pour résoudre des problèmes mathématiques (Flament [5], p. 45), entre autres, occupent les mathématiciens du XVI^e siècle. C'est dans ce contexte que l'existence des nombres imaginaires commence à intéresser les mathématiciens et que les premières découvertes à leur sujet ont lieu. C'est pourquoi nous qualifions le XVI^e siècle de période transitoire en ce qui concerne les nombres imaginaires. Cependant, nous verrons que les notations de cette époque ralentissent l'évolution des découvertes.

Les nombres imaginaires apparaissent pour la première fois dans la résolution d'équations du troisième degré. Selon certains historiens, le mathématicien italien Scipion Del Ferro (1465-1526) est le premier à tenter de donner une solution aux équations du troisième degré et à considérer les racines carrées de nombres négatifs. Cependant, cette découverte ne nous est pas parvenue car, à l'époque, la coutume veut que chaque découverte reste une invention personnelle. Pour la petite histoire, un peu plus tard, un autre mathématicien Nicolo Fontana (1500–1557), dit Tartaglia, parvient à résoudre des équations du troisième degré du type $x^3 + px^2 = q$. Mais, comme pour Del Ferro, sa méthode est restée inconnue. C'est au travers des écrits du mathématicien Cardan (1501-1576) que l'existence des nombres imaginaires nous est rapportée. En effet, il utilise des racines de nombres négatifs en voulant développer une méthode pour résoudre des équations du troisième degré du type $ax^3 + bx^2 + cx = d$.

À cette époque, différentes difficultés sont présentes lors de manipulations algébriques. Le premier obstacle est le manque de symbolisme algébrique. En effet, l'équation $2x^2 - 5x = 23$, par exemple, est écrite : « Duo quad, $\bar{m}$ quinque reb. aequalis 23 » ce qui est assez compliqué à manipuler. La deuxième difficulté est qu'au XVI^e siècle, les mathématiciens n'envisagent pas d'égaler le membre de droite d'une équation à zéro. Or, cette technique, utilisée de nos jours, facilite la recherche des racines d'une équation.

En gardant ces difficultés en tête, attardons-nous sur la démonstration, selon la méthode de Cardan, de la résolution d'une équation du troisième degré citée par Dominique Flament ([5], pp. 15-16). Il est important de remarquer que cette démonstration n'est pas celle écrite par Cardan mais les idées principales sont les mêmes. De plus, afin de faciliter la compréhension de la méthode de Cardan, nous utilisons les notations actuelles et égalons les équations algébriques à zéro.

Soit une équation polynomiale générale du troisième degré :

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0.$$

Afin d'éliminer le terme du second degré de cette équation, on pose $y = x - \frac{a}{3}$. Dès lors, on obtient comme nouvelle équation

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1.1}$$

Connaissant la décomposition du cube à partir d'une construction géométrique (se référer à la FIGURE 1.1), Cardan a proposé le changement de variables $x = u + v$.

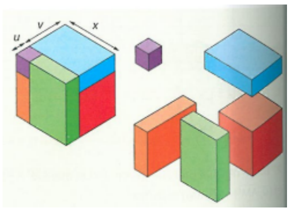


FIGURE 1.1 – Illustration de la décomposition du cube (Abihssira-Lavandier [7], p. 280)

Par ce changement de variables (où u et v sont des inconnues), on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x^3 &= (u+v)^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \\ &= u^3 + v^3 + 3uvx \end{aligned}$$

Donc

$$x^3 - 3uvx = u^3 + v^3 \tag{1.2}$$

En comparant les équations 1.1 et 1.2, on obtient :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p. \end{cases} \tag{1.3}$$

Le nombre $x = u + v$ sera racine de l'équation si on trouve u et v qui satisfont le système 1.3. Ce système 1.3 est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{r} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{array} \right.$$

Rappelons que dans l'équation $ax^2+bx+c = 0$, le terme $-b$ est égale à la somme des racines tandis que le terme c vaut le produit des racines. On peut donc considérer u^3 et v^3 comme les racines de l'équation $N^2 + qN - \frac{p^3}{27} = 0$.
En utilisant la résolution habituelle d'une équation du second degré, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ \end{array} \right.$$

et finalement, par le changement de variables $x = u + v$, nous avons :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{1.4}$$

qui est la formule de Cardan.

Cardan observe ensuite que les équations du troisième degré peuvent détenir jusqu'à trois racines. De plus, il accepte l'existence de quantités négatives (par exemple, la longueur du côté d'un carré peut être négative). Pour y parvenir, Cardan demande aux mathématiciens de l'époque de faire un effort d'imagination afin de pouvoir attribuer une aire négative à un carré (par exemple, un carré avec une aire de -15 et une longueur de côté égale à $\sqrt{-15}$). A cette fin, l'effort, qui leur est demandé, est de dépasser les conceptions admises à l'époque (au XVI^e siècle). À l'opposé, Cardan a tendance à n'accepter que ce qui peut être représenté. En effet, il trouve inutile de résoudre des équations au-delà du troisième degré car les équations du premier degré traitent des lignes, celles du deuxième degré traitent des plans (carrés) et celles du troisième degré traitent des solides (cubes). Puisque géométriquement, il n'est pas possible d'aller au-delà des solides, il ne trouve pas d'intérêt à résoudre des équations de degré supérieur ou égal à quatre.

La première théorie sur les nombres complexes a été édifiée par le mathématicien Raphaël Bombelli (1526–1572) et il l'a publiée dans son ouvrage appelé *L'Algèbre* en 1572. Dans cet ouvrage, Bombelli développe, avec une grande rigueur, les écritures qu'il utilise, les différentes propriétés des racines ainsi que les règles des signes dans une multiplication dont un facteur est la racine carrée de -1,

... Nous précisons, tout d'abord, le symbolisme que Bombelli attribue à la racine carrée de -1 selon qu'elle soit positive ou négative (au tableau 1.1).

TABLE 1.1 – Symbolisme de Bombelli pour les quantités imaginaires

Nom donné par Bombelli	Signification actuelle
§ più di meno §	$+\sqrt{-1}$
§ meno di meno §	$-\sqrt{-1}$

Sur base de ces deux écritures, nous détaillons les règles des signes de la multiplication dont, au moins, un des facteurs est la racine carrée de -1 (tableau 1.2).

TABLE 1.2 – Règle des signes dans une multiplication par Bombelli

Règles de Bombelli	Signification actuelle
§ più via più di meno fà più di meno §	$1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
§ meno via più di meno fà meno di meno §	$-1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$
§ più via meno di meno fà meno di meno §	$1 \cdot (-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$
§ meno via meno di meno fà più di meno §	$-1 \cdot (-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$
§ più di meno via più di meno fà meno §	$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$
§ più di meno via meno di meno fà più §	$\sqrt{-1} \cdot (-\sqrt{-1}) = 1$
§ meno di meno via più di meno fà più §	$(-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) = 1$
§ meno di meno via meno di meno fà meno §	$(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$

Comme dit précédemment, il est possible d'affirmer que Bombelli reconnaît l'existence des racines carrées de nombres négatifs ainsi que leur nature arithmétique. Cependant, le symbolisme qu'il utilise (se référer au tableau 1.1 et 1.2) est complexe et n'est guère approprié à des manipulations arithmétiques.

1.1.3 Fin du XVI^{e} siècle et le XVII^{e} siècle

Au cours de ce siècle, beaucoup de découvertes sont principalement basées sur l'intuition géométrique. Ainsi, l'algèbre pure (rhétorique) fait place à l'algèbre spécieuse qui appuie son raisonnement sur la géométrie. C'est dans un contexte où la géométrie prédomine, que les nombres imaginaires commencent à s'imposer. Toutefois, en dépit des diverses découvertes sur ces nombres, certains mathématiciens ne les acceptent toujours pas. C'est pourquoi nous qualifions le XVII^{e} siècle de période ambiguë.

Malgré toutes les recherches et les démonstrations, l'existence des nombres imaginaires n'est pas toujours acceptée par tous les mathématiciens de l'époque. Notamment, François Viète (1540-1603) et Thomas Harriot (1560-1621) refusent toujours l'existence des quantités imaginaires mais aussi des racines négatives (Flament [5], p. 33). Pourtant, ces mathématiciens nous ont légué des choses importantes (que nous ne détaillons pas ici).

À l'inverse de Viète et Harriot, d'autres mathématiciens acceptent aussi bien l'existence des quantités imaginaires que des racines négatives comme, par exemple, le mathématicien Albert Girard (1595-1632). En effet, dans son ouvrage, intitulé *Invention nouvelle en algèbre* (publié en 1629), nous retrouvons de nombreux résultats faisant intervenir des racines négatives d'un polynôme. Néanmoins, même si Girard accepte l'existence de ces quantités, il émet certaines réserves envers elles puisqu'il différencie, de temps à autre, une même opération en deux notations différentes. Prenons, par exemple, l'opération de soustraction de deux nombres X et Y (Flament [5], p. 36) :

- si X est plus grand que Y, il la note $\S X - Y\S$;
- sinon, en général, il la note $\S X = Y\S$.
  Remarquons que ce signe $\S = \S$ n'a pas la même signification que celle qu'on lui connait aujourd'hui (égalité). Ici, il représente bien une soustraction.

Il est à noter que Girard est le premier à avoir émis une idée pour représenter les nombres négatifs.

« *La solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant et le moins recule, là où le plus avance.* » (Flament [5], p. 38.)

La vision géométrique de Girard sur le + et le − est similaire à celle que nous connaissons actuellement d'un opérateur unaire. Comme l'explique la citation précédente, pour un axe donné (se référer à la FIGURE 1.2), écrire $-x(/+x)$ signifie que nous reculons(/avançons) de x unités par rapport à zéro.

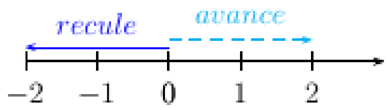


FIGURE 1.2 – Représentation d'une quantité positive ou négative

D'autre part, Girard exprime explicitement, au travers d'un théorème, la relation entre le degré le plus élevé d'une équation et le nombre de ses racines :

Théorème 1.
« *Toutes* [les] *équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre.* » (Girard cité par Flament [5], p. 37)

Par ce théorème, nous en déduisons, par exemple, qu'une équation du troisième degré admet trois racines.

Concernant l'appellation des nombres imaginaires, nous pouvons citer Descartes (1596-1650) et son ouvrage *La Géométrie* publié en 1637. Descartes est un mathématicien qui pense que « *la théorie et la rigueur se veulent l'expression d'un monde sensible* » (Flament [5], p. 39). Cette vision permet à Descartes de qualifier, avec un double sens, les racines carrées de nombres négatifs comme étant des « imaginaires ». En effet, cette qualification véhicule l'idée que les racines carrées de nombres négatifs ne sont pas réelles mais peuvent être imaginées. Nous en concluons que Descartes, tout comme Girard, accepte les quantités imaginaires.

1.1.4 XVIIIe siècle

Le XVIIIe siècle est enrichi de diverses découvertes autant sur la notation des nombres imaginaires que sur leur représentation dont nous reparlerons plus tard (à la section 1.2). Notamment, c'est lors de ce siècle que la forme générique (§ $A + B\sqrt{-1}$ §) des nombres imaginaires fait son apparition. Dans *réflexion sur la cause générale des vents* à l'article 79, d'Alembert nous décrit la forme générique de la manière qui suit (d'Alembert cité par Flamant [5], p. 72) :

« *Une quantité algébrique quelconque, composé tant d'imaginaires qu'on voudra, put toujours se réduire à* $A + B\sqrt{-1}$*,* A *et* B *étant des quantités réelles ; d'où il s'ensuit, que si la quantité proposée doit être réelle, on aura* $B = 0$. »

Ce résultat est démontré en 1746 par Jean Le Rond d'Alembert. Toutefois, cette forme générique § $A + B\sqrt{-1}$ § ne règle pas tout car plusieurs difficultés de différentes natures persistent. Entre autres, il y a les règles de calculs des nombres imaginaires (se référer au tableau 1.2 des règles de Bombelli).

Vers 1777, Leonhard Euler (1707-1783) propose la notation avec le symbole § i § au lieu de $\sqrt{-1}$ pour les nombres imaginaires. Il utilise cette notation pour résoudre le problème de l'incompatibilité entre l'utilisation des règles de calculs avec les radicaux et celles avec les imaginaires (se référer au tableau 1.2 pour les règles de calculs). Cependant, l'utilisation de cette nouvelle notation ne convainc pas et le symbole « i » ne s'impose pas.

Dans le savoir savant, l'existence des nombres imaginaires est acceptée lorsqu'une représentation géométrique de ceux-ci est trouvée. Dès à présent, nous développons donc l'apparition de telles représentations.

1.2 Représentations géométriques des nombres complexes

1.2.1 XVII^e siècle et début du XVIII^e siècle

Durant le XVII^e siècle, les mentalités des mathématiciens sont centrées sur la recherche logique, les processus mentaux et les préoccupations lexicales (Flament [5], p. 97). À cette époque, l'algèbre numérique et l'algèbre spécieuse (algèbre qui appuie son raisonnement sur la géométrie) sont deux choses différentes pour les mathématiciens. Autrement dit, des signes différents sont utilisés pour représenter des opérations géométriques et des opérations arithmétiques. Par exemple, l'égalité entre des nombres arithmétiques est désignée par le signe § $=$ § tandis que pour des nombres géométriques, c'est par le signe § :: §. De plus, c'est durant le XVII^e siècle et début du XVIII^e siècle que les mathématiciens se penchent sur l'aspect géométrique des nombres imaginaires. Nous qualifions donc ces deux périodes de périodes transitoires concernant les représentations des nombres imaginaires.

C'est grâce au mathématicien John Wallis (1616-1703) que l'aspect géométrique des nombres imaginaires apparait fin du XVII^e siècle. Il développe plusieurs représentations de ces nombres en s'intéressant à leur aspect géométrique. Cependant, la plupart d'entre elles présentent des défauts majeurs : la racine carrée de -1 est irreprésentable ou des quantités conjuguées sont représentées par des lignes de longueurs différentes. Malgré tout, ses diverses tentatives ont marqué une étape importante dans la représentation géométrique des nombres imaginaires en mettant en évidence plusieurs difficultés. Nous détaillons, maintenant, une représentation des nombres imaginaires selon Wallis, en reprenant les termes actuels. Dans cet exemple, dont l'illustration se trouve à la FIGURE 1.3, Wallis représente les nombres imaginaires comme étant une moyenne proportionnelle entre un nombre positif et un nombre négatif.

« *Soit un cercle de diamètre AC. Les segments mesurés sur le diamètre dans la direction AC sont positifs et ceux mesurés dans la direction opposée sont négatifs.*

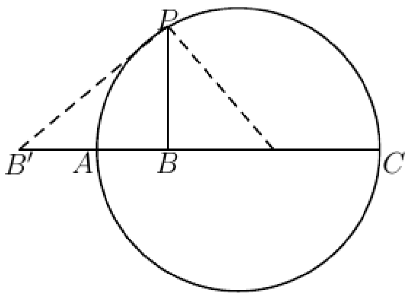


FIGURE 1.3 – Une des représentations des nombres imaginaires de Wallis

[Soit B un point quelconque de AC]. *Si nous élevons une perpendiculaire en B qui touche la circonférence en P alors :*

$BP^2 = AB \cdot BC$ *et donc BP est la moyenne proportionnelle entre AB et BC.*

[L'équation $BP^2 = AB \cdot BC$ est obtenue par le raisonnement suivant : Soit ρ l'angle entre les segments PB et PA et θ l'angle entre les segments PB et PC.

$$\begin{aligned}
\cos(\rho + \theta) &= \cos\rho\cos\theta - \sin\rho\sin\theta \\
&= \frac{PB}{PA}\frac{PB}{PC} - \frac{AB}{PA}\frac{BC}{PC} \\
&= \frac{PB^2 - AB \cdot BC}{PA \cdot PC}
\end{aligned}$$

or $\theta + \rho = 90°$ et $\cos 90° = 0$

$$\cos(\rho+\theta) \;= 0 = \frac{PB^2 - AB\cdot BC}{PA\cdot PC}$$

Donc $PB^2 = AB \cdot BC$.]

Disons $AB = b$ et $BC = c$, nous aurons $BP = \sqrt{+bc}$ [car $BP^2 = AB \cdot BC = bc$]. *D'autre part, la tangente en P joint le prolongement de CA en B'. Alors, $B'P^2 = AB' \cdot B'C$ et la tangente $B'P$ est la moyenne proportionnelle entre AB' et $B'C$. Posons $B'C = c$ et $AB' = -b$, on voit que $B'P$ correspond à $\sqrt{-bc}$.* » (Wallis cité par Colette [11], p. 11)

D'autres mathématiciens du XVIII^e siècle (comme par exemple Heinrich Kühn (1690-1769)) pensent qu'il est nécessaire de développer une représentation géométrique des nombres imaginaires. Malheureusement, pendant plus de 60 ans, personne n'apporte de nouveauté à ce sujet.

1.2.2 Fin du XVIII^e siècle

La recherche de rigueur et du bien-fondé, entre autres, occupent les mathématiciens du XVIII^e siècle (Flament [5], p. 99). À cette époque, ils attendent une preuve de l'existence des nombres imaginaires pour les accepter (ce qu'ils obtiendront grâce à une représentation géométrique). C'est finalement, à la fin du XVIII^e siècle, que les premières représentations cohérentes des nombres imaginaires sont produites.

Nous devons à Caspar Wessel (1745 - 1818), un arpenteur, la première représentation valable des nombres imaginaires (vers 1798). Pour cette représentation, il introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe réel et il interprète les vecteurs du plan comme étant des nombres imaginaires. Il va plus loin en définissant des opérations géométriques sur ces vecteurs : la soustraction, l'addition et la multiplication de deux vecteurs. De plus, Wessel donne une nouvelle interprétation et notation pour la racine carrée de -1. Comme nous le montre son raisonnement suivant, il identifie la racine carrée de -1 à § $+\varepsilon$ § et l'opposé de la racine carrée de -1 à § $-\varepsilon$ §. Pour une meilleure compréhension, nous remarquons que l'« angle de direction », présent dans cette citation, peut-être associé à l'argument actuel.

« *Désignons par $+1$ l'unité positive, par $+\varepsilon$ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine ; alors l'angle de direction de $+1$ sera égal à zéro degré, celui de -1 à 180 degrés, celui de $+\varepsilon$ et à 90 degrés et celui de $-\varepsilon$ à -90 degrés ou 270 degrés.* » (Wessel [6], p. 9.)

Par le raisonnement de Wessel, nous pouvons en déduire la FIGURE 1.4.

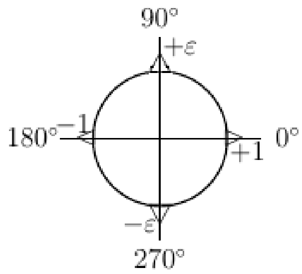


FIGURE 1.4 – Représentation de plus et moins la racine carrée de -1 selon Wessel

Remarquons que la notation introduite par Wessel est similaire à celle actuelle. La seule différence est le symbole utilisé : Wessel utilise § ε § tandis que nous utilisons i.

À coté de cela, Wessel a découvert une expression générale pour un vecteur de longueur r dont l'illustration se trouve à la FIGURE 1.5 (le segment en pointillé). L'expression du vecteur est :

$$\S\ r(\cos\nu + \varepsilon\sin\nu)\ \S \tag{1.5}$$

où ν est l'angle formé avec l'axe des réels positifs.

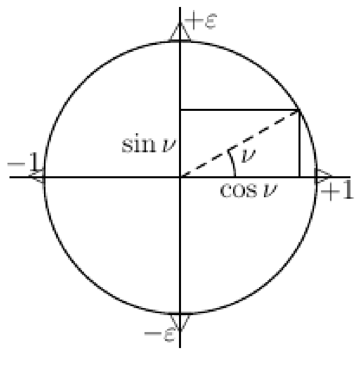


FIGURE 1.5 – Représentation d'un segment de droite quelconque de longueur 1

Par la suite, il identifie $\cos\nu$ et $\sin\nu$ à des segments de droites a et b et il obtient :

$$\S\ r(a + \varepsilon b)\ \S \tag{1.6}$$

Par les équations 1.5 et 1.6, nous constatons que Wessel identifie des objets géométriques (les segments de droites a et b) à des objets algébriques ($\cos \nu$ et $\sin \nu$). En conclusion, l'utilisation des nombres imaginaires dans les calculs est justifiée par la géométrie en introduisant la notion de « segment indirect ».

Malgré tout, l'ouvrage de Wessel n'a guère d'influence sur les mathématiciens de l'époque et l'évolution des mathématiques du XIX^{e} siècle. Il fût oublié pendant un siècle avant de ressurgir, en 1895, grâce aux mathématiciens C. Juel et S.A. Christensen par un compte rendu de ses travaux et une mention de son ouvrage.

1.2.3 XIX^{e} siècle

La rigueur dans les définitions des objets mathématiques et la recherche d'universalité dans le discours mathématique intéressent les mathématiciens du XIX^{e} siècle. Une des difficultés de ce siècle est de construire une « langue-mathématique » susceptible d'intégrer les nombres négatifs et imaginaires. C'est dans ce contexte que la représentation actuelle des nombres imaginaires est apparue.

Le mathématicien Jean-Robert Argand (1768-1822) est l'auteur d'une importante découverte concernant la représentation géométrique des nombres imaginaires. Pour la petite histoire, Argand publie sa découverte en 1806 mais ce n'est qu'en 1813, grâce au mathématicien J.F. Français, qu'Argand se fait connaître. C'est dans son ouvrage « Essai » qu'Argand fait part de sa représentation géométrique des nombres imaginaires en utilisant le concept de lignes dirigées, que nous associons à nos vecteurs actuels. En effet, la ligne dirigée $\overline{AB}$ est une ligne allant du point A vers le point B de longueur $|AB|$. Argand caractérise donc les lignes dirigées par leur longueur et leur direction ce qui s'apparente au module et à l'argument actuel des nombres imaginaires. Argand interprète géométriquement les nombres imaginaires de la manière suivante, en se référant à la FIGURE 1.6.

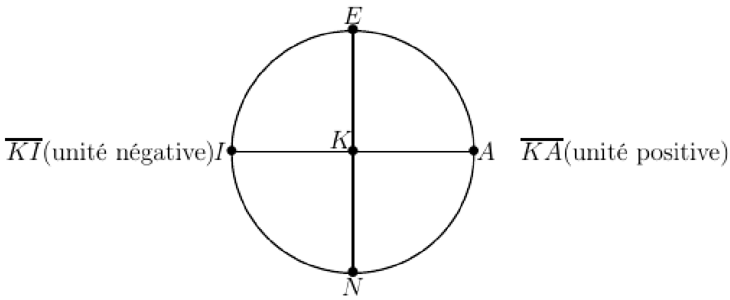


FIGURE 1.6 – Représentation des nombres imaginaires par Argand

« [...] *la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de celle de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme +1 et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinaire par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.* » (Argand cité par Flament [5], p. 171)

Comme le montre son interprétation, Argand identifie les nombres imaginaires à des lignes dirigées (à savoir nos vecteurs actuels). En effet, les lignes dirigées perpendiculaires à $\overline{KA}$ (à la FIGURE 1.6) sont interprétées comme des nombres imaginaires de la forme § $\pm b\sqrt{-1}$ § et celles parallèles à $\overline{KA}$ sont interprétées comme des nombres réels de la forme § a §. Argand va plus loin en définissant la règle d'addition et de multiplication des lignes dirigées. L'explication de ces deux règles est inspirée de [5].

La règle d'addition de deux lignes dirigées (inspiré de Flament [5], p. 184) illustrée à la FIGURE 1.7.

Soit $\overline{KP}$ et $\overline{KQ}$ deux lignes dirigées. Effectuer la somme de ces deux lignes revient à prolonger le segment $\overline{KQ}$ d'une longueur $\|KP\|$ où $\|KP\| = \|QR\|$. La somme recherchée est donc la ligne dirigée $\overline{KR}$ qui est égale à $\overline{KP} + \overline{KQ}$.

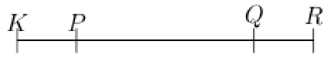


FIGURE 1.7 – Représentation de la règle d'addition de deux lignes dirigées selon Argand

La règle de la multiplication de deux lignes dirigées (inspiré de Flament [5], p. 187) illustrée à la FIGURE 1.8.

Soit les angles PKQ et RKS sont égaux, alors nous avons que le produit suivant est vérifié.

$$\overline{KP} \cdot \overline{KS} = \overline{KQ} \cdot \overline{KR}$$

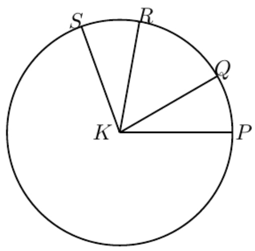


FIGURE 1.8 – Représentation de la règle de la multiplication de deux lignes dirigées selon Argand

Remarquons qu'Argand illustre, en premier lieu, la règle de la multiplication en utilisant un cercle unité, signifiant que le module vaut 1. Par la suite, il définit, à nouveau, la multiplication de deux lignes dirigées mais plus nécessairement sur un cercle unité.

Concernant la notation des nombres imaginaires, un nouveau symbolisme est introduit par Argand. Il identifie $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ aux symboles $\S \sim \S$ et $\S \not\sim \S$. Cependant, les mathématiciens de l'époque ne retiennent pas cette notation.

Les nombres complexes prennent leur statut définitif comme entité mathématique grâce au mathématicien Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Selon Gauss, les « quantités imaginaires » doivent être considérées comme « *aussi possibles que les quantités réelles* »(Gauss cité par Flament [5], p. 261). De plus, il est favorable à l'utilisation des nombres complexes mais contre l'utilisation du nom « imaginaire » ou « impossible ». C'est pourquoi il suggère l'appelation de « nombre complexe » qui est adoptée.

Concernant la notation de la partie imaginaire des nombres complexes, Gauss reprend le symbole § i § proposé, auparavant, par Euler. Contrairement à ce dernier, Gauss a su imposer ce symbole § i § aux mathématiciens et il introduit la notation § $z = a+ib$ § (où a et b sont des nombres réels) pour un nombre complexe. De plus, Gauss interprète les nombres complexes comme étant des points du plan formé par deux axes perpendiculaires, à savoir l'axe des réels et l'axe des imaginaires. Dès lors, il représente, par exemple, les nombres $1+2i$, $-2+i$, $-3-2i$ et $3-i$ comme étant, respectivement, les points A, B, C, et D de la FIGURE 1.9.

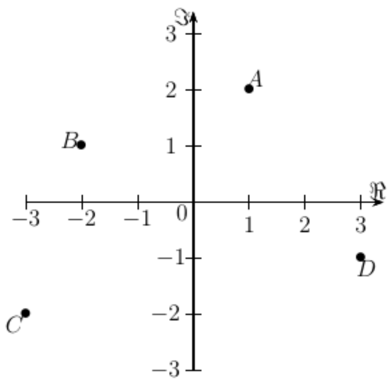


FIGURE 1.9 – Représentation des nombres complexes par Gauss

1.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de développer le premier savoir de la transposition didactique de Chevallard : le savoir savant.

En parcourant les différents siècles entre le XVI^{e} et le XIX^{e}, nous avons pu relater l'apparition des nombres complexes et de leurs représentations géométriques dans le savoir savant. De plus, nous avons mis en évidence l'importance de ces représentations pour l'acceptation des nombres complexes comme entité mathématique.

Nous pouvons, dès lors, répondre à deux des questions de recherche formulées précédemment dans la phase d'introduction de ce mémoire, à savoir :

- Les représentations géométriques des nombres complexes ont-elles joué un rôle important dans l'acceptation de ces nombres dans la communauté mathématique ?

- Historiquement, les nombres complexes sont-ils apparus sous le statut « objet » ou « outil » (au sens de Douady) ? Les représentations géométriques ont-elles joué un rôle important pour le passage de l'un à l'autre statut (« objet », « outil ») ?

Grâce à l'analyse à caractère épistémologique, nous pouvons affirmer que les représentations géométriques ont joué un rôle fondamental dans l'acceptation des nombres complexes. Comme dit auparavant, les mathématiciens n'ont majoritairement accepté l'existence des nombres complexes que lorsqu'une représentation géométrique de ces nombres est apparue. De plus, historiquement, les nombres complexes sont apparus comme « outil » (au sens de Douady) pour résoudre des équations algébriques. Cependant, leur statut, en tant que « objet », n'a été possible qu'après l'introduction d'une représentation géométrique adéquate. Nous en concluons que cette représentation géométrique a permis le changement du statut des nombres complexes de « outil » à « objet ».

Chapitre 2

Deux cadres théoriques pour l'analyse

Ce mémoire a pour objectif, entre autres, de comprendre les difficultés auxquelles les étudiants doivent faire face lors de la manipulation de nombres complexes et plus spécifiquement lors de la représentation géométrique de ceux-ci. Ainsi, nous analyserons, au chapitre 3, des questions d'examens proposées aux étudiants en premier bachelier en Sciences Biologiques, Géologiques et Géographiques durant la session de juin 2013 à l'université de Namur. À cette fin, nous présentons dans ce chapitre les cadres théoriques que nous utiliserons dans nos analyses :

- les cadres et changements de cadres (Douady [3]) et les registres de représentations sémiotiques (Duval [4]) ;
- les organisations mathématiques (Chevallard [2] et [10]).

Nous les appliquerons aux nombres complexes.

2.1 Cadres et registres

Avant de définir les approches de Douady (notion de cadres) et de Duval (notion de registres), notons qu'il n'est pas nécessairement aisé d'effectuer la différence ente les cadres et les registres dans certaines situations.

2.1.1 Cadres et changements de cadres

Douady définit la notion de cadre de la manière suivante (Douady [3], p. 135).

Définition 1.
« [Un cadre est] *constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problèmatique développée.* »

Nous pouvons identifier plusieurs cadres comme le cadre géométrique, le cadre algébrique, le cadre arithmétique, le cadre des matrices, ... Par la définition 1, il est à noter qu'un même concept mathématique peut exister dans plusieurs cadres. En effet, les nombres complexes peuvent se trouver dans le cadre algébrique (exemple : avec la forme $z = a + bi$) mais aussi dans le cadre géométrique (exemple : avec la représentation géométrique de la forme $z = a + bi$).

Au vu des différents cadres existant, le changement de cadres peut savérer utile lors de la résolution d'un problème. Douady définit la notion de changement de cadres comme suit (Douady cité par Alvesdias [1], p. 29).

Définition 2.
« [Le changement de cadres] *est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.* »

Nous en déduisons que le changement de cadres apporte une nouvelle interprétation du problème de départ. Toutefois, ces deux formulations ne sont pas toujours tout à fait équivalentes. Douady montre combien il est important que l'enseignement d'un concept passe par plusieurs cadres pour une meilleure maîtrise du sujet. De plus, ces changements permettent l'enrichissement des connaissances des deux cadres considérés et permettent aux élèves de construire une partie de leur savoir. Pour mieux comprendre, prenons l'exemple de la recherche de racines d'une équation. Si l'enseignement de cette matière passe seulement par un cadre géométrique (retrouver les racines grâce à une figure géométrique) et si nous demandons de rechercher analytiquement les racines, les élèves n'en sont pas capables. En effet, ils pensent seulement au cadre géométrique et ne font pas le lien entre la recherche géométrique et analytique des racines. L'utilisation de plusieurs cadres, lors de l'enseignement, va donc permettre aux élèves de passer d'un cadre à un autre au moment voulu.

2.1.2 Registres

Duval introduit la notion de registre de représentations sémiotiques vers 1993. Mais qu'est-ce qu'une représentation sémiotique ? Voici la définition donnée par Duval (Duval cité par Alvesdias [1], p. 30).

Définition 3.
« [Des représentations sémiotiques sont des] *productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement* »

Par cette définition, nous comprenons que les représentations sémiotiques sont, par exemple, une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une écriture symbolique, une équation, ... Par ailleurs, un concept mathématique peut posséder plusieurs représentations sémiotiques. Par exemple, les représentations sémiotiques pour une courbe sont une figure géométrique et une équation.

Duval définit un registre de représentations sémiotiques de la manière suivante (Duval [4], pp. 41-42).

Définition 4.
« [Un regriste de représentations sémiotiques est]*un système sémiotique qui doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :*

- *La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné [...] une sélection de traits et de données dans le contenu à représenter [...] qui se fait en fonction des unités et des règles de formation propres au registre sémiotique dans lequel la représentation est produite. [...]*
- *Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée.[...]*
- *La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité de cette représentation ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale.* »

Tout comme les cadres, il existe différents registres comme le registre graphique, le registre algébrique, le registre des tableaux, le registre verbal, ... Pour les étudiants, le changement d'un registre à un autre n'est pas quelque chose de systématique ni d'évident. Néanmoins, ce changement peut s'avérer utile afin de simplifier la résolution d'un problème. Il est donc essentiel de travailler sur différents registres avec les élèves et de leur apprendre à passer d'un registre à un autre lors de l'apprentissage.

Remarquons que le changement d'un registre à un autre peut nous amener à un changement de cadres mais cela n'est pas toujours le cas.

2.1.3 Cadres et registres pour les nombres complexes

Un des buts de ce mémoire est de comprendre les difficultés des étudiants lors de la manipulation et de la représentation géométrique des nombres complexes pour améliorer l'enseignement de ce concept. Afin d'atteindre cet objectif, nous allons énumérer et expliciter un ensemble de cadres et de registres liés aux nombres complexes qui nous aidera dans l'analyse des réponses proposées par les étudiants à l'examen de juin 2013. Certains des registres ci-dessous ont été définis suite à une analyse préalable des questions de l'examen de juin 2013.

Nous précisons ainsi les cadres et les registres pour les nombres complexes.

Les cadres

- Le cadre géométrique est constitué d'objets issus de la géométrie, comme un système d'axes, des points du plan, des vecteurs, ...
- Le cadre numérique est composé, principalement, de nombres et de fonctions trigonométriques ainsi que de symboles mathématiques et d'opérations algébriques.

Les registres

- Le registre géométrique.

  Concernant les nombres complexes, ce registre est divisible en trois, à savoir :

  - le registre géométrique pur utilise des représentations graphiques et des outils géométriques (comme par exemple, la règle du parallélogramme).

    Ce registre peut être de nouveau divisé en deux, à savoir le registre géométrique des points et le registre géométrique des vecteurs, selon que nous travaillons avec l'un ou l'autre.
  - le registre des coordonnées cartésiennes utilise les coordonnées cartésiennes d'un ou plusieurs point(s). Rappelons que les coordonnées cartésiennes sont les projections sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

- le registre des coordonnées polaires recourt aux coordonnées polaires d'un ou plusieurs point(s). Rappelons que les coordonnées polaires d'un point M sont (r, α) où r est la distance entre l'origine et le point M et α est l'angle entre l'axe polaire qui part de l'origine (par convention l'axe horizontal) et le segment reliant le point d'origine au point M.

Pour les analyses ultérieures, une telle distinction des variantes du registre géométrique ne sera pas utilisée puisqu'il n'est pas aisé de savoir ce que les étudiants avaient en tête lors de la production des réponses aux questions de l'examen proposé. Nous ferons ainsi référence au registre géométrique en général.

- Le registre numérique.

  Ce registre consiste à utiliser des définitions ou des formules mathématiques. Concernant les nombres complexes, ce registre se décline en quatre :

  - le registre numérique algébrique utilise la forme algébrique $z = a + ib$, où a et b sont des réels, pour représenter un nombre complexe z ;
  - le registre numérique trigonométrique recourt à la forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où r est le module de z (noté aussi $|z|$) et θ est l'argument de z, pour désigner un nombre complexe z ;
  - le registre numérique exponentiel emploie la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, où r est le module de z (noté aussi $|z|$) et θ est l'argument de z, pour représenter un nombre complexe z.
  - le registre calculatoire fait intervenir des calculs algébriques (addition, multiplication,...) sans l'utilisation explicite des formes de représentations (algébrique, exponentielle et trigonométrique).

2.2 Les mathématiques, une organisation (Chevallard)

En vue de comprendre l'approche de Chevallard, nous allons expliciter ce qu'est une praxéologie. Notons tout d'abord qu'en mathématique, nous privilégions le terme organisation mathématique à celui de praxéologie. La rédaction de cette section est inspirée de [2] et [10].

Chevallard conçoit les objets mathématiques comme des praxéologies (autrement dit des organisations mathématiques). Mais que signifie le mot praxéologie ?

Ce mot provient du grec : praxis signifiant pratique et logos signifiant raison (/discours). Nous identifions donc une praxéologie à l'union d'*un bloc pratico-technique* Π avec *un bloc technologico-théorique* Λ. La notation pour une telle organisation mathématique est :

$$[\Pi, \Lambda] = [\underbrace{T, \tau}_{\Pi}, \underbrace{\theta, \Theta}_{\Lambda}]$$

.

où le bloc pratico-technique $\Pi = [T, \tau]$ est constitué d'une technique τ pour accomplir les tâches de type T et le bloc technologico-théorique Λ est constitué d'une technologie θ justifiant la technique τ et d'une théorie Θ justifiant la technologie θ.

Dans la pratique, pour résoudre un exercice ou un problème identifiable à une organisation mathématique, la première chose à effectuer est d'identifier le type de tâches T demandé. Après cette identification, il est possible de trouver une technique pour réaliser la tâche. Ces deux étapes sont celles du bloc pratico-technique Π . Par ailleurs, nous pouvons aller plus loin en justifiant, d'abord, la technique choisie par une technologie et ensuite, en justifiant la technologie par une théorie. Ces deux dernières étapes sont celles qui constituent le bloc technologico-théorie Λ.

Nous allons, dès à présent, expliciter les quatre éléments constituant une organisation mathématique.

1) Types de tâches

Pour rappel, nous notons un type de tâches par T et une tâche par t. Ainsi, l'expression $t \in T$ désigne une tâche t de type T. L'exemple suivant permet de mieux comprendre cette dernière notation.

Exemple

- La tâche t_1 est de résoudre l'inéquation $2x \leq 4$.
- La tâche t_2 est de résoudre l'inéquation $2x - 5 \leq 7$.

Les tâches t_1 et t_2 proviennent du même type de tâches T, à savoir résoudre une inéquation du premier degré.

Une tâche t et un type de tâches T s'expriment par un verbe suivi d'un objet relatif au verbe. En effet, « résoudre une équation » est un type de tâches alors que « résoudre » ne l'est pas.

2) Techniques

Une technique, notée τ, relative à un type de tâches T est définie comme étant *une manière de réaliser, de résoudre des tâches t du type T* (Chevallard [10], p. 2). Dès lors, une technique τ peut servir à accomplir plusieurs tâches. De plus, nous parlons du bloc pratico-technique $\Pi = [T/\tau]$ lorsque pour un type de tâches T donné, il est possible de trouver une technique τ pour résoudre la tâche t.

3) Technologies

Une technologie θ se définit comme étant *un discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches de type T* (Chevallard [10], p. 3). La technologie possède trois fonctions principales :

- *justifier la technique* en démontrant que la technique utilisée nous donne le résultat escompté ;
- *expliquer, rendre intelligible, éclairer la technique* en expliquant à l'aide de mots simples le fonctionnement de la technique ;
- *produire des techniques* car *il existe des technologies [...] qui ne sont encore technologies d'aucune technique ou de très peu de techniques* (Chevallard [10], p. 4).

4) Théories

La théorie, symbolisée par le symbole Θ, est définie comme un discours ayant pour objectif l'explication et la justification de la technologie utilisée. Ainsi, la théorie est donc pour la technologie ce que la technologie est pour la technique, à savoir, un moyen de justification.

La technologie et la théorie forment ensemble le bloc technologico-théorique $\Lambda = [\theta/\Theta]$ donnant une explication de ce qui est effectué dans le bloc pratico-technique.

Exemple d'une organisation mathématique

Afin d'illustrer les différents composants d'une organisation mathématique, nous développons un exemple relatif aux nombres complexes.

Soit $z = 3 + 4i$. Écrivez z sous la forme trigonométrique.

Cet énoncé et sa résolution peuvent être considérés sous forme d'une organisation mathématique $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où :

- T, le type de tâches, est : écrire, sous la forme trigonométrique, un nombre complexe donné sous la forme algébrique.
- τ, la technique pour accomplir la tâche, peut-être :
  - calculer $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta) = \frac{4}{5} \\ \cos(\theta) = \frac{3}{5} \end{array} \right.$ pour obtenir l'amplitude de l'angle θ qui est de 0,93 radians.
  - écrire la forme trigonométrique qui est : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 5(cos(0,93) + i\sin(0,93))$.
- θ, la technologie associée, est :
  - définir la partie réelle a et la partie imaginaire b de la forme algébrique $z = a + bi$;
  - calculer le module r et l'argument θ.
    Le module d'un nombre complexe donné sous la forme algébrique $z = a + bi$ est $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et l'argument θ du même nombre complexe est obtenu en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta) = \frac{b}{r} \\ \cos(\theta) = \frac{a}{r} \end{array} \right.$.
- Θ, la théorie associée, est : un nombre complexe peut s'écrire sous différentes formes, à savoir la forme algébrique $z = a + bi$, la forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. Pour passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à la forme trigonométrique, il faut tout d'abord se placer dans un système orthonormé. Dans cette structure, le nombre complexe $z = a + bi$, sous la forme algébrique, peut se représenter comme le vecteur $\overrightarrow{0Z}$ (se référer à la FIGURE 2.1).

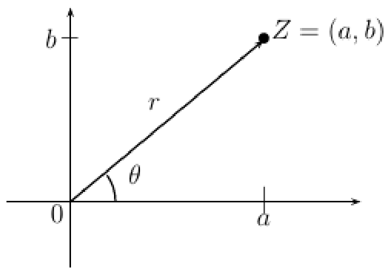


FIGURE 2.1 – Représentation du nombre complexe $z = a + bi$

Par le théorème de Pythagore dans le triangle $0Za$, nous en déduisons que $r^2 = a^2 + b^2$ et donc le module du nombre complexe z est $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Par les formules trigonométriques et la FIGURE 2.1, nous obtenons que $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$ et $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$. Dès lors, l'argument de z est obtenu en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta) = \frac{b}{r} \\ \cos(\theta) = \frac{a}{r} \end{array} \right.$.

Chapitre 3

Analyse du savoir enseigné

Une fois la présentation des cadres théoriques sur lesquels s'appuieront nos analyses faite, attardons-nous sur l'analyse du savoir enseigné à partir des 94 diapositives du cours donné, au premier bachelier en Sciences Biologiques, Géologiques et Géographiques au cours de l'année académique 2012-2013, par Madame De Vleeschouwer Martine. Remarquons que selon le parcours scolaire de ces étudiants, tous n'ont pas encore abordé cette notion dans l'enseignement secondaire. C'est la raison pour laquelle nous nous basons uniquement sur ce cours, et que nous ne nous sommes pas penchés sur le programme de l'enseignement secondaire.

Ce chapitre rejoint la transposition didactique de Chevallard (se référer p. 1). Remarquons qu'à l'université, il n'existe pas de distinction entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. En effet, le savoir à enseigner se réfère aux programmes scolaires et le savoir enseigné, quant à lui, fait référence aux savoirs transmis par l'enseignant. En l'absence de programmes scolaires à l'université, nous regroupons ces deux savoirs en un seul, à savoir, le savoir enseigné.

3.1 Analyse du chapitre enseigné concernant les nombres complexes

Dans un premier temps, nous présentons le plan général du cours destiné au premier bachelier en Sciences Biologiques, Sciences Géologiques et Sciences Géographiques en 2012-2013.

- Chapitre 1 : les fonctions réelles élémentaires
- Chapitre 2 : les dérivées de fonctions d'une variable réelle
- Chapitre 3 : fonctions de plusieurs variables

- Chapitre 4 : primitives et intégrales
- Chapitre 5 : fonctions logarithmes et exponentielles
- Chapitre 6 : introduction aux équations différentielles
- Chapitre 7 : calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires
- Chapitre 8 : éléments de calcul vectoriel
- Chapitre 9 : les nombres complexes

C'est à ce dernier chapitre que nous allons nous intéresser. Cette matière a été enseignée à l'aide de diapositives dont le contenu est une transposition didactique (mise en place par le professeur) de celui du syllabus fourni aux étudiants. Nous avons choisi, dans notre analyse, de ne considérer que ces diapositives puisque c'est le support se rapprochant le plus de ce qui a été vu au cours. Le plan du chapitre sur les nombres complexes donné au cours de l'année académique 2012-2013 à l'université de Namur peut être visualisé ci-dessous. Notons que la version actuelle a été modifiée.

1) Introduction
   - Des carrés négatifs
   - Utilité dans les équations différentielles
   - Utilité : lien entre cos, sin et exponentielle

2) Représentations des nombres complexes
   - Représentations d'un nombre complexe z
   - Module et argument d'un nombre complexe
   - Passage d'une représentation à une autre

3) Opérations sur les complexes
   - Egalité de complexes
   - Multiplication de complexes

4) Racines d'un nombre complexe

- Racines $\text{n}^{\text{ième}}$
- Racines carrées

5) Divers

Penchons-nous, à présent, sur le contenu des diapositives (94 en tout) et notons que pour réaliser cette description, nous n'avons pas bénéficié de l'enseignement ni des commentaires fournis en classe.

1) Introduction

- *Des carrés négatifs*
- *Utilité dans les équations différentielles*
- *Utilité : lien entre cos, sin et exponentielle*

Cette première partie du cours introduit le nombre imaginaire i ainsi que son utilité dans les équations différentielles homogènes et non homogènes (matière vue au chapitre 6). Le lien entre le cosinus, le sinus, l'exponentielle et le nombre imaginaire i est également présent ($e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$). Les définitions abordées, dans cette partie, sont : le nombre complexe (partie imaginaire et réelle), l'égalité de deux nombres complexes et le conjugué d'un nombre complexe.

L'introduction aux nombres complexes s'effectue via le nombre imaginaire i et diverses définitions en découlent. Lors de cette partie constituée de 18 diapositives (19,15% du total des slides), aucune représentation géométrique n'est utilisée.

2) Représentations des nombres complexes

- *Représentations d'un nombre complexe z*

  Cette section définit et représente géométriquement (via les points du plan) les différentes formes d'un nombre complexe (résumées au tableau 3.1). Les coordonnées utilisées, lors de ces représentations, sont les coordonnées cartésiennes pour la forme algébrique et les coordonnées polaires pour la forme exponentielle et trigonométrique.

TABLE 3.1 – Les formes d'un nombre complexe

Coordonnées utilisées	Formes
Coordonnées cartésiennes	Forme algébrique ($z = a + bi$)
Coordonnées polaires	Forme exponentielle ($z = re^{i\theta}$)
Coordonnées polaires	Forme trigonométrique ($z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$)

- *Module et argument d'un nombre complexe*

  La définition et la représentation géométrique (via les points du plan) du module et de l'argument d'un nombre complexe sont développées. À coté de cela, la méthode pour calculer le module d'un nombre complexe, selon ses formes (algébrique, exponentielle et trigonométrique), est présentée dans un cadre numérique.

- *Passage d'une représentation à une autre*

  Cette section explique, dans un cadre numérique, comment passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à la forme exponentielle ou trigonométrique et inversément. Aucune représentation géométrique n'est utilisée.

- *Représentation du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe*

  Ce point définit algébriquement et représente géométriquement (via les points du plan) le conjugué et l'opposé d'un nombre complexe selon ses formes (algébrique, exponentielle et trigonométrique). Dès lors, nous les noterons « formes ATE » où le A est pour algébrique, le T pour trigonométrique et le E pour exponentielle.

3) Opérations sur les complexes

- *Egalité de complexes*

  Les conditions pour avoir l'égalité entre deux nombres complexes selon ses formes ATE sont explicitées dans un cadre numérique. Cependant, aucune visualisation géométrique n'est proposée.

- *Addition de complexes*

  Dans un cadre numérique, l'addition de deux nombres complexes sous forme algébrique ainsi que les propriétés d'une telle addition sont définies. Quant à sa représentation géométrique, elle est illustrée à l'aide des exemples.

- *Multiplication de complexes*

  Les définitions du produit et du quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique et exponentielle sont explicitées dans un cadre numérique. De plus, une représentation géométrique (via les points du plan) est proposée, de façon théorique, avec la forme exponentielle. Les propriétés, ci-dessous, de la multiplication de deux nombres complexes sont détaillées dans un cadre numérique.

  - La commutativité.
  - L'associativité.
  - La distributivité par rapport à l'addition.
  - L'existence d'un neutre.
  - L'existence d'un symétrique.
  - Le conjugué d'un produit de deux nombres complexes.

  Toujours dans le cadre numérique, l'inverse et la $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre complexe sont définis selon les formes ATE. Une visualisation géométriquement (via les points du plan) de l'inverse d'un nombre complexe est proposée.

- *Opérations sur le module*

  Cette section représente géométriquement (via des points du plan) le module d'un nombre complexe et définit, dans un cadre numérique, les propriétés du module.

4) Racines d'un nombre complexe

Préalablement, la racine carrée d'un nombre réel et complexe est définie dans un cadre numérique.

- *Racines $n^{ième}$*

  La définition (dans le cadre numérique) ainsi que la représentation graphique (dans le cadre géométrique) de la racine $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe sous la forme exponentielle sont précisées.

- *Racines carrées*

  Cette section définit le cas particulier de la racine carrée d'un nombre complexe selon ses formes ATE (dans le cadre numérique).

5) Divers

Nous retrouvons l'explication (dans le cadre numérique) et la représentation graphique (dans le cadre géométrique) de la multiplication et de la division d'un nombre complexe par le nombre imaginaire i.

3.2 Constatations

Suite à l'analyse de ces diapositives, plusieurs constatations peuvent être effectuées.

- Sur 94 diapositives, il y a 37 représentations géométriques (y compris celles des exercices/exemples) reprises sur 33 slides. Certaines représentations sont utilisées plusieurs fois tout au long de la présentation. De plus, sur certaines diapositives, les représentations ne sont pas toujours mises en avant puisqu'il nous semble que le texte ressort plus que l'image.
- La première partie concernant l'introduction des nombres complexes ne comporte aucune représentation géométrique.
- Tout au long des diapositives, des exemples et des exercices sont proposés aux étudiants. Au total, il y a 39 exercices/exemples sur 33 slides et parmi ces exercices, treize d'entre eux font référence au cadre géométrique (exercices posés dans un cadre géométrique ou exercices dont la résolution demande une représentation géométrique).
- La définition de l'addition de nombres complexes se fait via la forme algébrique dans le cadre numérique. Elle est présentée, ensuite, dans le cadre géométrique à l'aide d'exemples illustrant l'addition vectorielle.
- La définition de la multiplication s'effectue, tout d'abord dans le cadre numérique, via la forme algébrique ainsi que par la forme exponentielle et trigonométrique. Par la suite, elle est présentée de façon théorique, dans le cadre géométrique, à partir d'une représentation géométrique.
- L'enseignement de certaines notions passe par des changements de cadres (du cadre numérique au cadre géométrique ou inversément) et/ou des changements de registres.

Rappelons que pour effectuer ces constatations, nous n'avons pas eu accès à l'enseignement ni aux commentaires fournis aux étudiants lors du cours. De plus, nous nous sommes concentré sur les diapositives mises à la disposition des étudiants puisque c'est le support se rapprochant le plus de ce qui a été vu en classe.

Chapitre 4

Analyse d'une partie du savoir appris des étudiants

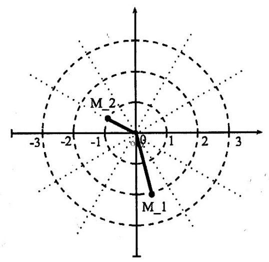
Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'enseignement que les étudiants de premier bachelier en Sciences Biologiques, Sciences Géologiques et Sciences Géographiques ont reçu. Il est intéressant, maintenant, de se pencher sur les différentes erreurs et les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage des nombres complexes. Dès lors, nous consacrons ce chapitre à l'étude du savoir appris et des difficultés des étudiants via l'analyse d'une partie de l'examen de juin 2013.

4.1 Analyse a priori des tâches

Nous allons faire une analyse a priori d'une partie de l'examen proposé aux étudiants concernés en juin 2013. Concernant les nombres complexes, nous nous concentrerons, en particulier, sur deux tâches posées dans un cadre géométrique que nous décrivons aux sections 4.1.1 et 4.1.2. Pour les analyser, nous détaillerons le bloc practico-technique (constitué d'un type de tâches T et d'une technique τ) de l'organisation mathématique à laquelle ces tâches appartiennent.

4.1.1 Tâche 1 : l'addition de deux nombres complexes

Dans le dessin ci-dessous, les points M_1 et M_2 sont respectivement les images des nombres complexes z_1 et z_2. Indiquez l'image du nombre complexe $z_1 - z_2$. **Justifiez votre démarche en utilisant les termes adéquats.**



Les registres présents dans l'énoncé de cette tâche sont d'une part le registre géométrique lorsqu'il est fait référence à des objets géométriques comme le point ou l'image d'un nombre complexe, d'autre part le registre calculatoire puisqu'il est demandé d'effectuer $z_1 - z_2$. Rappelons que le cadre de cette tâche est géométrique.

L'ensemble des blocs pratico-techniques de cette tâche est la somme $\sum_i [T_1, \tau_{1,i}]$ où

- T_1, le type de tâches, est de représenter géométriquement la résultante de la soustraction de deux nombres complexes donnés dans un cadre géométrique.
- $\tau_{1,i}$, la technique i pour accomplir la tâche 1 (à savoir : soustraire deux nombres complexes).

Nous présentons ci-dessous différentes techniques pour résoudre la tâche 1. Certaines d'entre elles permettent d'obtenir des résultats plus précis que d'autres.

a) **Technique du parallélogramme (P)**

Utiliser la règle du parallélogramme pour obtenir la résultante de $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ où $-\overrightarrow{OM_2}$ est l'opposé de $\overrightarrow{OM_2}$.

Cette technique s'inscrit dans le cadre géométrique et le registre géométrique.

b) **Technique numérique cartésienne (NC)**

1) Évaluer approximativement la partie réelle et imaginaire (/les coordonnées cartésiennes) [1] des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme algébrique de ces nombres et soustraire les parties réelles et imaginaires (/les coordonnées cartésiennes) entre elles.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la soustraction de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que le registre numérique algébrique.

c) **Technique numérique polaire algébrique (NPA)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) [2] des deux nombres complexes.
2) Calculer la partie réelle et imaginaire (/les coordonnées cartésiennes) de ces deux nombres et les soustraire entre elles.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la soustraction de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que le registre calculatoire ou le registre numérique algébrique.

d) **Technique numérique polaire trigonométrique (NPT)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme trigonométrique de ces deux nombres et passer à la forme algébrique. Après, soustraire les parties réelles et imaginaires (/les coordonnées cartésiennes) de ces deux nombres.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la soustraction de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que les registres numérique algébrique et numérique trigonométrique.

---

1. N'ayant que les copies d'examen à disposition, il n'est guère évident de savoir si l'étudiant a pensé aux coordonnées cartésiennes ou à la partie réelle et imaginaire lorsqu'il écrit a et b.
2. N'ayant que les copies d'examen à disposition, il n'est guère évident de savoir si l'étudiant a pensé aux coordonnées polaires ou au module et à l'argument lorsqu'il écrit r et θ.

e) **Technique numérique polaire exponentielle (NPE)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme exponentielle de ces deux nombres et passer à la forme algébrique. Après, soustraire les parties réelles et imaginaires (/les coordonnées cartésiennes) de ces deux nombres.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la soustraction de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que les registres numérique algébrique et numérique exponentielle.

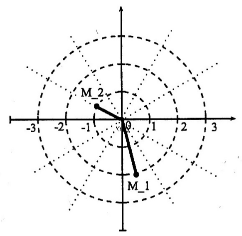
À présent, analysons les différentes techniques en termes de cadres et de registres : les techniques numérique polaire trigonométrique (NPT), numérique polaire exponentielle (NPE), numérique polaire algébrique (NPA) et numérique cartésienne (NC) changent deux fois de cadres pour la résolution de la tâche 1. Par contre, la technique du parallélogramme (P) ne change pas de cadre. De même, les techniques NPA, NPT et NPE nécessitent un changement de registres tandis que les autres techniques n'en demandent aucun.

Table 4.1 – Nombre de changements de cadres et de registres pour les techniques de la tâche 1

Techniques	Nombre de changements de cadres	Nombre de changements de registres
P	0	0
NC	2	0
NPA	0 ou 2 (selon le cadre de résolution)	1
NPT	2	1
NPE	2	1

4.1.2 Tâche 2 : la multiplication de deux nombres complexes

Dans le dessin ci-dessous, les points M_1 et M_2 sont respectivement les images des nombres complexes z_1 et z_2. Indiquez l'image du nombre complexe $z_1 \cdot z_2$. **Justifiez votre démarche en utilisant les termes adéquats.**



Les registres présents dans l'énoncé de cette tâche sont d'une part le registre géométrique lorsqu'il est fait référence à des objets géométriques comme le point ou l'image d'un nombre complexe, d'autre part le registre calculatoire puisqu'il est demandé d'effectuer $z_1 \cdot z_2$. Rappelons que le cadre de cette tâche est géométrique.

L'ensemble des blocs pratico-technique de cette tâche est la somme $\sum_i [T_2, \tau_{2,i}]$ où

- T_2, le type de tâches, est de représenter géométriquement la résultante de la multiplication de deux nombres complexes donnés dans un cadre géométrique.
- $\tau_{2,i}$, la technique i pour accomplir la tâche 2 (à savoir : multiplier deux nombres complexes).

Nous présentons ci-dessous différentes techniques pour résoudre la tâche 2. Certaines d'entre elles permettent d'obtenir des résultats plus précis que d'autres.

a) **Technique polaire géométrique (PG)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) des deux nombres complexes.
2) Multiplier les modules et additionner les arguments[3] entre eux.

3. Nous pouvons le faire directement à partir de la figure géométrique ou en passant par des calculs numériques.

3) Représenter géométriquement l'affixe de la multiplication de ces nombres.

Cette technique utilise le cadre géométrique ou les cadres géométrique et numérique selon que l'étudiant effectue ou non des calculs numériques. De même, pour le registre de résolution, nous avons soit le registre géométrique ou calculatoire.

b) **Technique cartésienne algébrique (CA)**

1) Évaluer approximativement la partie réelle et imaginaire (/les coordonnées cartésiennes) des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme algébrique de ces nombres et effectuer la double distributivité entre eux.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la multiplication de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que le registre numérique algébrique.

c) **Technique polaire trigonométrique (PT)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme trigonométrique de ces nombres et passer à la forme algébrique.
3) Effectuer la double distributivité entre les deux nombres complexes.
4) Représenter géométriquement l'affixe de la multiplication de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que les registres numérique algébrique et numérique trigonométrique.

d) **Technique polaire exponentielle (PE)**

1) Définir le module et l'argument (/les coordonnées polaires) des deux nombres complexes.
2) Écrire explicitement la forme exponentielle afin de multiplier les modules et additionner les arguments entre eux.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la multiplication de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que le registre numérique exponentielle.

e) **Technique cartésienne exponentielle (CE)**

1) Écrire les deux nombres complexes sous la forme algébrique.
2) Passer à la forme exponentielle afin de multiplier les modules et additionner les arguments entre eux.
3) Représenter géométriquement l'affixe de la multiplication de ces nombres.

Cette technique utilise les cadres géométrique et numérique ainsi que les registres numérique algébrique et numérique exponentielle.

À présent, analysons les différentes techniques en termes de cadres et de registres : toutes les techniques, sauf la technique polaire géométrique (dans le cadre géométrique), changent deux fois de cadres pour la résolution de la tâche. De même, les techniques polaire trigonométrique (PT) et cartésienne exponentielle (CE) nécessitent un changement de registres tandis que les autres techniques n'en demandent pas.

TABLE 4.2 – Nombre de changements de cadres et de registres pour les techniques de la tâche 2

Techniques	Nombre de changements de cadres	Nombre de changements de registres
PG	0 ou 2 (selon le cadre de résolution)	0
CA	2	0
PT	2	1
PE	2	0
CE	2	1

4.2 Analyse a posteriori

L'analyse a posteriori des deux tâches a pour objectif de comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants ainsi que les erreurs qu'ils commettent et d'obtenir des pistes afin d'améliorer l'enseignement des nombres complexes.

4.2.1 De manière générale

Pour l'analyse des deux tâches (présentées aux sections 4.1.1 et 4.1.2) de l'examen 2013, nous classons les étudiants selon 5 catégories.

- Parfait : lorsque l'étudiant a réussi parfaitement la tâche et a justifié sa démarche (un exemple est donné à la FIGURE 4.1).

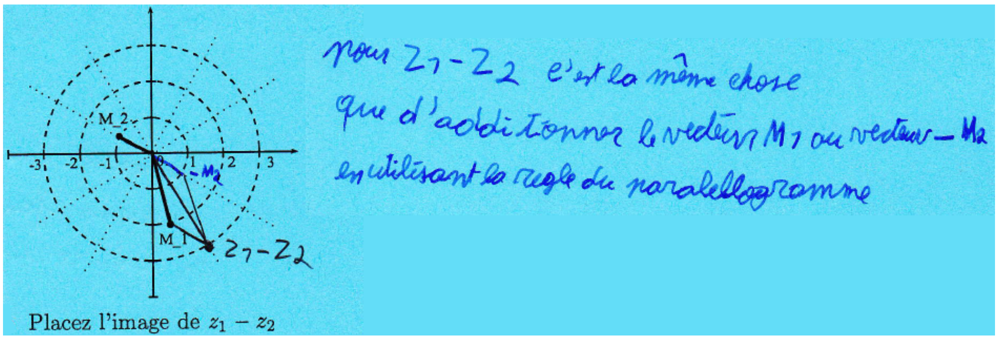


FIGURE 4.1 – Exemple d'une copie d'un élève de catégorie parfait

L'étudiant a résolu parfaitement la tâche 1 en utilisant la règle de parallélogramme pour obtenir la résultante de $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$. De plus, il a justifié son raisonnement par une phrase.

- Réussite : lorsque l'étudiant a bien placé l'image de $z_1 - z_2/z_1 \cdot z_2$, mais, soit il a fait une erreur dans son raisonnement (exemple, mal additionné deux nombres) ou dans sa justification, soit il n'a pas justifié sa démarche (illustré à la FIGURE 4.2).

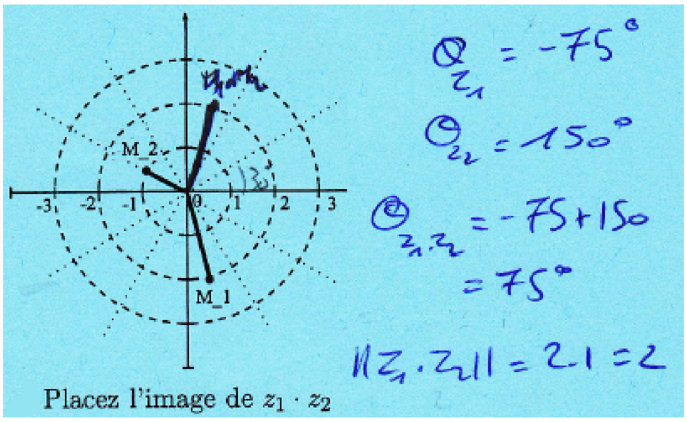


FIGURE 4.2 – Exemple d'une copie d'un élève de catégorie réussite

L'étudiant a réussi à effectuer la tâche 2 correctement mais il n'a pas justifié sa démarche.

- Échec : lorsque l'étudiant a essayé de solutionner la tâche, mais, soit il n'a pas terminé son raisonnement, soit il l'a terminé avec des erreurs importantes ne permettant pas de résoudre la tâche proposée (une illustration est proposée à la FIGURE 4.3) ;

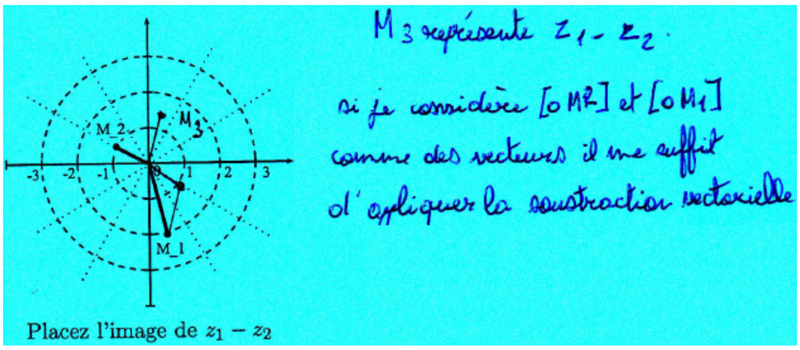


FIGURE 4.3 – Exemple d'une copie d'un élève de catégorie échec

L'étudiant a une technique valable pour résoudre la tâche 1, à savoir l'utilisation de la soustraction vectorielle, mais il ne l'applique pas correctement.

- Nul : lorsque l'étudiant a essayé de solutionner avec une méthode incohérente (un exemple est donné à la FIGURE 4.4).

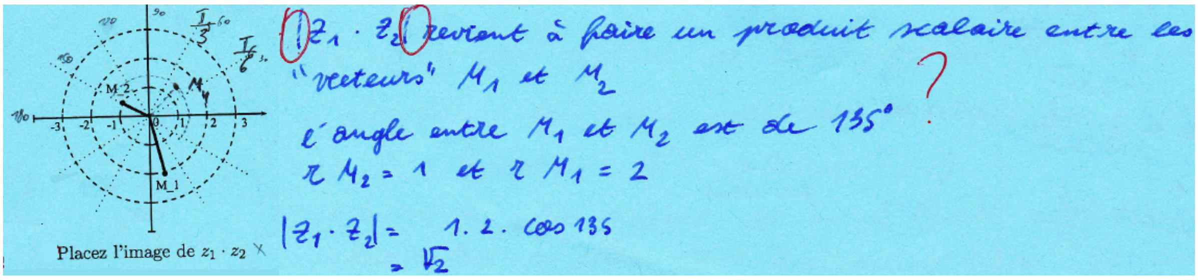


FIGURE 4.4 – Exemple d'une copie d'un élève de catégorie nul

L'étudiant utilise le produit scalaire pour multiplier des vecteurs, ce qui est incorrecte.

- Pas fait : lorsque l'étudiant n'a pas essayé de résoudre la tâche.

Sur les 83 étudiants ayant passé cet examen, analysons le classement des résultats à partir du tableau 4.3.

TABLE 4.3 – Nombre d'étudiants selon les catégories de classement et la tâche demandée

	Catégories					Total
	Parfait	Réussite	Échec	Nul	Pas fait	
Tâche 1	21	23	15	14	10	83
Tâche 2	22	30	9	9	13	83

Au vu du tableau 4.3 et pour la suite de l'analyse, nous décidons de ne pas tenir compte des étudiants qui n'ont pas essayé d'effectuer la tâche. Tout comme ceux, dans la catégorie « nul », qui ont moins de 5/20 au total à l'examen. En effet, nous supposons que ces étudiants n'ont pas étudié et donc ne se sont pas investis dans le cours. En conséquence, le tableau 4.4 reprend le nombre d'étudiants pris en compte pour la suite de notre analyse selon la tâche et la catégorie à laquelle ils appartiennent.

TABLE 4.4 – Nombre d'étudiants pris en compte pour l'analyse selon les catégories

	Catégories				Total
	Parfait	Réussite	Échec	Nul	
Tâche 1	21	23	15	12	71
Tâche 2	22	30	9	6	67

Au total, nous retenons 71 étudiants pour la soustraction de deux nombres complexes (tâche 1) et 67 étudiants pour la multiplication de ces nombres (tâche 2).

En considérant ces nombres d'étudiants, analysons la moyenne des résultats de chaque tâche afin de savoir laquelle est la mieux réussie par les étudiants. Cette analyse s'appuie sur le tableau 4.5.

TABLE 4.5 – Moyenne des résultats des étudiants pour les deux tâches

Tâche	Moyenne
Tâche 1	1,75/3 (avec 71 élèves)
Tâche 2	2,11/3 (avec 67 élèves)

La tâche 2 concernant la multiplication de deux nombres complexes est, en moyenne, mieux réussie que la tâche 1 qui concerne la soustraction.

Une explication possible est que, lors du cours théorique, la multiplication de deux nombres complexes a été présentée, de façon théorique, dans le cadre géométrique (cadre dans lequel la question est posée) et dans le cadre numérique ; alors que la soustraction a été introduite théoriquement dans le cadre numérique et seulement représentée géométriquement dans des exemples (se référer à la section 3.2 du chapitre 3).

Après discussion avec la titulaire du cours, Madame De Vleeschouwer, notons que le lien théorique entre la soustraction de nombres complexes dans le cadre géométrique et dans le cadre numérique s'est effectué oralement lors du cours. Cependant, cela ne transparaît pas dans les diapositives mises à notre disposition, ni dans le syllabus fournit aux étudiants.

4.2.2 Techniques utilisées par les étudiants

4.2.2.1 Changements de cadres

Dans cette partie, nous analysons les cadres privilégiés par les étudiants pour la résolution des tâches. De plus, s'il y a un changement de cadres, nous étudions la manière dont ce changement a été effectué.

Tâche 1 sur la soustraction de nombres complexes
Tout d'abord, nous observons le cadre le plus utilisé en général ainsi que celui le plus employé par les étudiants réussissant la tâche 1, grâce au tableau 4.6.

TABLE 4.6 – Nombre d'élèves selon le(s) cadre(s) utilisé(s) et la catégorisation pour la tâche 1

Cadres utilisés (tâche 1)	Parfait	Réussite	Échec	Nul	Total
Géométrique	21	6	4	7	38
Géométrique-numérique-géométrique	0	17	11	5	33

En général, le cadre géométrique est le plus utilisé pour résoudre la soustraction de deux nombres complexes. De même, les étudiants qui réussissent le mieux sont ceux qui ont plus tendance à utiliser le cadre géométrique (cadre de la tâche). Au contraire, en passant par le cadre numérique, nous observons que les étudiants échouent plus souvent. Nous en déduisons donc que, pour résoudre la tâche 1, il vaut mieux garder le cadre dans lequel la tâche est proposée.

Concentrons-nous, dès à présent, sur la manière dont les étudiants effectuent les changements de cadres. Pour ce faire, nous définissons ci-dessous trois manières pour passer d'un cadre à un autre.

- La manière approximative : lorsqu'il y a une approximation des paramètres soit dans la forme algébrique ou trigonométrique ou exponentielle des nombres complexes (illustré à la FIGURE 4.5).

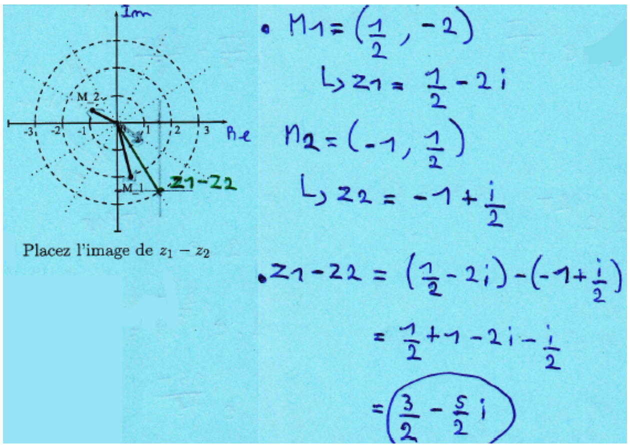


FIGURE 4.5 – Exemple d'une copie d'un élève ayant effectué un changement de cadres approximatif

L'étudiant a approximé la partie réelle et imaginaire de la forme algébrique des nombres complexes pour passer du cadre géométrique au cadre numérique.

- La manière exacte : lorsqu'il n'y a ni erreur ni approximation (illustré à la FIGURE 4.6).

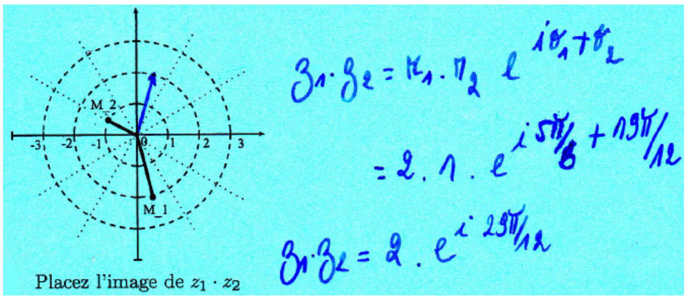


FIGURE 4.6 – Exemple d'une copie d'un élève ayant effectué un changement de cadres exact

L'étudiant n'a utilisé aucune approximation et il ne s'est pas trompé en définissant les modules et les arguments des deux nombres complexes pour passer d'un cadre à l'autre.

- La manière ratée : lorsqu'il y a une erreur dans le passage comme, par exemple, un angle mal défini, une faute de signe, une approximation fausse, ... (illustré à la FIGURE 4.7).

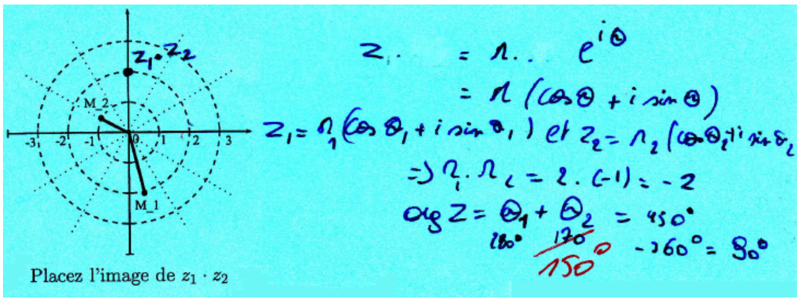


FIGURE 4.7 – Exemple d'une copie d'un élève ayant effectué un changement de cadres raté

L'étudiant a commis une erreur dans la définition de l'argument du nombre complexe z_2 lors du passage du cadre géométrique au cadre numérique.

À en croire le tableau 4.7, le changement vers un autre cadre est, la plupart du temps, approximatif. La tendance des étudiants à utiliser les coordonnées cartésiennes (/partie réelle et imaginaire) pour effectuer la soustraction de nombres complexes est une explication possible. Ces changements sont le plus souvent exacts avec les techniques NPE, NPA et NPT. Au contraire, la technique NC, la plus privilégiée en général, entraîne un changement de cadre approximatif.

TABLE 4.7 – Nombre d'étudiants selon les techniques et les manières pour passer d'un cadre à l'autre pour la tâche 1

(tâche 1)	Manières		
Techniques	Approximative	Exacte	Ratée
P	0	0	0
NC	16	0	2
NPA	0	4	0
NPT	0	4	0
NPE	0	6	1
Total	16	14	3

Tâche 2 sur la multiplication de nombres complexes
En général, pour résoudre la multiplication de deux nombres complexes, le cadre numérique est le plus utilisé. De même, les étudiants qui réussissent le mieux sont ceux qui ont tendance à utiliser le cadre numérique. À l'opposé de la tâche 1, nous en déduisons que les étudiants préfèrent changer de cadres pour résoudre la tâche 2. Ces constatations sont tirées à partir du tableau 4.8.

TABLE 4.8 – Nombre d'étudiants selon le(s) cadre(s) utilisé(s) et la catégorisation pour la tâche 2

Cadres (tâche 2)	Parfait	Réussite	Échec	Nul	Total
Géométrique	10	3	1	2	16
Géométrique-numérique-géométrique	12	27	7	4	50
Géométrique-numérique	0	0	1	0	1

En se référent au tableau 4.9, nous constatons que les changement de cadres sont, la plupart du temps, exacts, notamment avec les techniques PG et PE. Par contre, la technique CA entraîne souvent un changement approximatif ce qui n'est pas le cas des techniques PE et PG.

TABLE 4.9 – Nombre d'étudiants selon les techniques et les manières pour passer d'un cadre à l'autre pour la tâche 2

(tâche 2)	Manières		
Techniques	Approximative	Exacte	Ratée
PG	0	10	0
CA	9	1	2
PT	0	3	0
PE	0	16	6
CE	2	1	1
Total	11	31	9

4.2.2.2 Techniques utilisées

Dans cette section, nous analysons les techniques privilégiées par les étudiants selon la question posée et leur catégorisation.

Tâche 1 sur la soustraction de nombres complexes
À partir du tableau 4.10, nous analysons les techniques (définies préalablement à la section 4.1.1, pp. 40-42) privilégiées par les étudiants. Remarquons que par rapport à l'analyse a priori, il y a deux nouvelles techniques, à savoir « NPA partielle » et « NPE partielle ». La différence entre ces deux dernières et celles définies auparavant est que les étudiants oublient de passer par la forme algébrique des nombres complexes et donc la soustraction s'effectue sur le module et l'argument (au lieu de la partie réelle et imaginaire).

Table 4.10 – Nombre d'étudiants selon les différentes techniques pour la tâche 1

Techniques (tâche 1)	Nombres d'étudiants
P	30
NC	18
NPT	4
NPA	2
NPE	4
NPA partielle	10
NPE partielle	3
Total	71

Les étudiants favorisent la technique *P* et ensuite la technique *NC*. Cependant, nous pourrions nous demander : quelle technique est privilégiée par ceux réussissant la tâche 1 ? Pour répondre à cette question, nous allons scinder la technique *NC* en deux. Dès lors, nous introduisons une nouvelle notation :

- la technique NC* : lorsque l'étudiant repasse par le registre numérique exponentiel avant de représenter géométriquement l'affixe de la soustraction des deux nombres complexes.

TABLE 4.11 – Nombre d'étudiants selon la technique utilisée et la catégorisation pour la tâche 1

Techniques (tâche 1)	Erreur	Parfait	Réussite	Échec	Nul
NC	/	0	13	4	0
NC*	/	0	0	1	0
P	/	21	6	0	0
P	addition des nombres ou effectuer $z_2 - z_1$	0	0	3	0
NPT	/	0	3	1	0
NPA	/	0	1	1	0
NPE	/	0	0	4	0
NPA partielle	/	0	0	1	9
NPE partielle	/	0	0	0	3
Total		21	23	15	12

En se référant au tableau 4.11, nous constatons que c'est la technique *P* puis la technique *NC* et la technique *NPT* qui favorisent le plus la réussite des étudiants. Les autres techniques engendrent, quant à elles, de mauvais résultats. En résumé, ce sont les techniques *NC* (se trouvant dans le cadre numérique) et *P* (se trouvant dans le cadre géométrique) qui sont à privilégier.

Tâche 2 sur la multiplication de nombres complexes

Nous recommençons l'analyse effectuée précédemment pour la tâche 2 en observant le tableau 4.12. Tout d'abord, remarquons que la technique « PG partielle » correspond à la technique *PG* dans laquelle, après avoir défini le module et l'argument des nombres complexes, les étudiants ont utilisé des outils vectoriels sans rapport avec ces nombres.

Les techniques les plus utilisées par les étudiants pour effectuer la tâche 2 sont la technique *PG* et *PE* (se référer au tableau 4.12).

TABLE 4.12 – Nombre d'étudiants selon les différentes techniques pour la tâche 2

Techniques (tâche 2)	Nombres d'étudiants
NA	12
PE	22
CE	4
PT	3
PG	23
PG partielle	3
Total	67

Mais quelles sont les techniques privilégiées par les étudiants réussissant la tâche 2 ? Pour répondre à cette question, analysons le tableau 4.13.

TABLE 4.13 – Nombre d'étudiants selon la technique utilisée et la catégorisation pour la tâche 2

Techniques (tâche 2)	Parfait	Réussite	Échec	Nul
NC	0	6	4	2
PE	4	16	2	0
CE	0	0	2	2
PT	0	3	0	0
PG	18	5	0	0
PG partielle	0	0	1	2
Total	22	30	9	6

En se référant au tableau 4.13, nous constatons que les étudiants, qui réussissent, utilisent le plus souvent la technique *PG* ou la technique *PE*. Concernant la technique *PT*, elle est très peu utilisée, mais il semble qu'elle permet de réussir la tâche proposée. Quant aux autres techniques, elles engendrent de mauvais résultats. En résumé, les techniques privilégiées par les étudiants, pour résoudre la tâche 2, sont la *PE* (se trouvant dans le cadre numérique) et la *PG* (se trouvant dans le cadre géométrique ou numérique).

4.2.2.3 Nombre de changements de registres

Nous allons nous attarder sur le nombre de changements de registres effectués par les étudiants lors de la résolution des tâches 1 et 2. Plus particulièrement, sur l'influence des changements de registres sur la réussite de ces tâches.

Tâche 1 sur la soustraction de nombres complexes
En analysant le tableau 4.14, nous observons que le changement de registres est utilisé par peu d'étudiants (11 sur 71) et qu'il donne, en général, des résultats insatisfaisants. Nous supposons qu'il est préférable de changer le moins possible de registres lors de la résolution de la tâche 1.

TABLE 4.14 – Nombre d'étudiants selon le nombre de changements de registres et la catégorisation pour la tâche 1

Nombres de changements (tâche 1)	Parfait	Réussite	Échec	Nul
0	21	19	8	12
1	0	4	7	0
Total	21	23	15	12

Tâche 2 sur la multiplication de nombres complexes
En analysant le tableau 4.15, nous relevons les mêmes constatations qu'au tableau précédent, à savoir que le changement de registres est peu utilisé (7 étudiants sur 67) et qu'il ne donne pas de très bons résultats. Nous supposons, de même, qu'il n'est pas conseillé de changer de registre lors de la résolution de la tâche 2.

TABLE 4.15 – Nombre d'étudiants selon le nombre de changements de registres et la catégorisation pour la tâche 2

Nombres de changements (tâche 2)	Parfait	Réussite	Échec	Nul
0	22	27	7	4
1	0	3	2	2
Total	22	30	9	6

4.2.2.4 Conclusion

Pour une question posée dans un cadre géométrique, le choix du cadre de résolution dépend, majoritairement, de l'opération mathématique demandée (soustraction, multiplication, ...). En effet, pour la tâche 2, les étudiants (qui réussissent) privilégient le cadre numérique. Au contraire, lors de la tâche 1, les élèves ont tendance à utiliser le cadre géométrique (cadre de la tâche). Nous pouvons imaginer que le choix du cadre dépend, aussi, de l'enseignement proposé aux étudiants. Dans notre cas, rappelons que lors du cours, la multiplication a été enseignée, de façon théorique, dans les cadres numérique et géométrique. Au contraire, la soustraction a été définie, théoriquement, dans le cadre numérique et seulement représentée géométriquement dans des exemples (se référer à la section 3.2 du chapitre 3). Une autre explication possible est que les étudiants préfèrent travailler dans le cadre numérique car cela les rassure.

De plus, nous avons constaté que lors de la *résolution* des deux tâches, les étudiants qui changent le moins possible de registres (pour la technique) et de cadres réussissent mieux. Remarquons qu'à l'inverse, lors de l'*enseignement* des nombres complexes, comme Douady le préconise, l'utilisation des changements de cadres et de registres est importante.

4.2.3 Erreurs des étudiants

Dans cette partie, nous définissons les erreurs commises par les étudiants lors de la résolution de l'une des deux tâches et nous analyserons ces erreurs par la suite. Dans le tableau 4.16, chaque erreur est décrite et il est précisé dans quelle tâche elle peut être rencontrée. Pour ce faire, lorsqu'il est noté T_1 ($/T_2$), cela signifie que l'erreur peut intervenir lors de la résolution de la tâche 1 (/tâche 2).

TABLE 4.16 – Erreurs possibles pour les tâches 1 et 2

Dénomination de l'erreur	Description de l'erreur	Tâche(s) concernée(s)
Erreur d' approximations	Approximation de la partie réelle (a) et imaginaire (b) de la forme algébrique des nombres complexes lors du passage au registre numérique algébrique.	T_1 et T_2
Erreur de Calculs	Erreur dans la manipulation des nombres (exemple : soustraction, addition,...).	T_1 et T_2
Erreur d'angle	Erreur dans l'interprétation numérique des angles.	T_1 et T_2
Erreur de connaissance	Mauvaise connaissance de base en géométrie (exemple : 75° = -75°) et/ou en trigonométrie.	T_1 et T_2
Erreur de produit	Confusion entre le produit vectoriel et le produit scalaire dans la technique.	T_2
Erreur de technologie	Confusion dans la technologie pour justifier la technique (exemple : confusion entre le produit scalaire et le produit vectoriel).	T_1 et T_2
Erreur de passage	Erreur d'interprétation lors du passage d'un cadre à un autre ou d'un registre à l'autre.	T_1 et T_2
Erreur du parallélogramme	Erreur dans l'utilisation de la règle du parallélogramme (exemple : mauvais positionnement de l'image de -$\overrightarrow{OM_2}$) ou erreur dans la lecture de l'énoncé (exemple : additionner au lieu de soustraire, ...).	T_1

Par le tableau 4.16, nous observons que la plupart des erreurs relevées peuvent être présentes dans la résolution des deux tâches. Cependant, notons que l'erreur, que nous avons qualifiée de « produit », est propre à la tâche 2 tandis que l'erreur nommée « parallélogramme » est, quant à elle, propre à la tâche 1.

Nous présentons, dès à présent, l'analyse effectuée à partir de ces erreurs.

4.2.3.1 Tâche 1 sur la soustraction de nombres complexes

Les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs d'approximations et les erreurs de calculs. Nous retrouvons ensuite les erreurs du parallélogramme et de passage, ce qui, pour nous, est alarmant. En effet, cela signifie que certains étudiants ont des lacunes dans l'utilisation de la règle du parallélogramme et dans le passage d'un cadre à un autre. Heureusement, cela n'est vrai que pour une minorité des étudiants. Ces différents résultats se retrouvent dans le tableau 4.17.

Table 4.17 – Nombres d'étudiants selon les erreurs commises pour la tâche 1

Erreurs (tâche 1)	Nombres d'étudiants
d'approximations	16
de calculs	12
d'angle	1
du parallélogramme	5
de connaissance	1
de technologie	1
de passage	4
Total	40

Maintenant, analysons les erreurs commises selon la catégorisation des étudiants grâce au tableau 4.18. Ce tableau ne reprend pas les étudiants ayant résolu parfaitement la tâche 1 puisque ces derniers n'ont commis aucune erreur dans la résolution. Pour les autres catégories d'étudiants, les erreurs les plus fréquentes sont :

- l'erreur d'approximations lorsque la catégorie est réussite ;
- l'erreur de calculs lorsque la catégorie est échec ou nul.

Nous retrouvons donc les erreurs les plus fréquentes citées précédemment.

TABLE 4.18 – Nombre d'étudiants selon les erreurs commises et la catégorisation pour la tâche 1

Erreurs (tâche 1)	Réussite	Échec	Nul	Total
d'approximations	12	4	0	16
de calculs	1	8	3	12
d'angle	0	0	1	1
du parallélogramme	2	3	0	5
de connaissance	0	1	0	1
de technologie	0	1	0	1
de passage	1	2	1	4
Total	17	18	5	40

4.2.3.2 Tâche 2 sur la multiplication de nombres complexes

En général (se référer au tableau 4.19), les erreurs les plus fréquemment commises sont identiques à celle de la tâche 1, à savoir les erreurs d'approximations et les erreurs de calculs. Néanmoins, nous constatons aussi que l'erreur de passage est courante.

TABLE 4.19 – Nombre d'étudiants selon les erreurs commises pour la tâche 2

Erreurs (tâche 2)	Nombres d'étudiants
d'approximations	12
de calculs	8
d'angle	4
de produit	2
de connaissance	1
de passage	7
Total	34

Maintenant, analysons les erreurs commises selon la catégorisation des étudiants grâce au tableau 4.20. Ce tableau ne reprend pas les étudiant qui ont résolu parfaitement la tâche 2 puisqu'ils n'ont commis aucune erreur dans la résolution. Pour les autres catégories d'étudiants, les erreurs les plus fréquentes sont :

- l'erreur d'approximations, de passage et de calculs lorsque la catégorie est réussite et échec ;

- l'erreur d'approximations, de calculs et de produit lorsque la catégorie est nul.

TABLE 4.20 – Nombre d'étudiants selon les erreurs commises et la catégorisation pour la tâche 2

Erreurs (tâche 2)	Réussite	Échec	Nul	Total
d'approximations	6	4	2	12
de calculs	3	3	2	8
d'angle	2	1	1	4
de produit	0	0	2	2
connaissance	1	0	0	1
de passage	3	4	0	7
Total	15	12	6	34

4.2.3.3 Conclusion

Quelle que soit la tâche, les erreurs les plus habituelles sont celles d'approximations et de calculs. Par contre, les erreurs les moins courantes sont : l'erreur de technologie, de connaissance et d'angles pour la tâche 1 et l'erreur de connaissance pour la tâche 2.

4.2.4 Technologies utilisées

Cette section a pour objectif d'analyser l'influence ou non de la présence d'une technologie (au sens de Chevallard) lors de la résolution des tâches 1 et 2. Avant tout, comme les conclusions sont les mêmes quelle que soit la tâche demandée, nous réunissons les analyses des deux tâches en une présentation.

En observant le tableau 4.21, nous constatons qu'il y a environ la moitié des étudiants qui écrivent une technologie pour justifier ce qu'ils font.

TABLE 4.21 – Nombre d'étudiants selon la présence d'une technologie

(tâche 1 et tâche 2)	Nombre d'étudiants	
Présence d'une technologie	Soustraction	Multiplication
Oui	36	31
Non	35	36

Cependant, peut-on dire que la présence écrite d'une technologie a une influence sur la réussite de la tâche ? Pour y répondre, regardons le tableau 4.22.

Table 4.22 – Nombre d'étudiants selon la présence d'une technologie et la catégorisation

(tâche 1 et tâche 2)	Présence de technologie		Absence de technologie	
	Soustraction	Multiplication	Soustraction	Multiplication
Parfait	21	22	0	0
Réussite	6	6	17	24
Échec	2	3	13	6
Nul	7	0	5	6
Total	36	31	35	36

Nous en concluons que le fait de laisser une trace écrite de la technologie utilisée (au sens de Chevallard) permet, en général, aux étudiants de réussir la tâche proposée. Cela semble logique puisque le fait de savoir justifier une réponse et mettre des mots sur ce qui est fait est un signe de compréhension. Notons que ce n'est ni une condition nécessaire ni suffisante.

4.2.5 Conclusion générale

Numériquement, la soustraction de deux nombres complexes semble plus naturelle que la multiplication. Mais lorsque cette question est posée dans un cadre géométrique, cette tendance ne semble plus si évidente. En effet, dans l'analyse précédente, les étudiants ont, en général, mieux réussi la question sur la multiplication que celle sur la soustraction. Une justification possible est que, lors de l'enseignement théorique, les cadres géométrique et numérique sont utilisés pour la multiplication de deux nombres complexes. Cependant, le cours théorique n'a présenté la soustraction que dans le cadre numérique, le cadre géométrique n'intervenant que lors d'exemples. En conséquence, lors de l'enseignement des nombres complexes, nous pensons qu'il est conseillé d'utiliser les cadres géométrique et numérique lors des explications théoriques (comme Douady le préconise).

Concernant les choix du cadre, du registre et de la technique pour la résolution de la tâche demandée, ils dépendent du cadre dans lequel la tâche est formulée mais aussi de la tâche en elle-même. Pour illustrer ces propos, reprenons les deux types de tâches que nous avons analysées.

- La tâche 1 : la soustraction de deux nombres complexes.

  Si la tâche est posée dans le cadre géométrique, nous avons constaté que le cadre géométrique avec la technique P et le registre géométrique est privilégié pour la résolution de la tâche. Toutefois, si nous voulons utiliser le cadre numérique, c'est la technique NC avec le registre numérique algébrique qui donne les meilleurs résultats. Cependant, nous avons établi qu'il est déconseillé d'utiliser les techniques NPE et NPA dans ce dernier cadre.

- La tâche 2 : la multiplication de deux nombres complexes.

  Si la tâche est posée dans le cadre géométrique, nous avons remarqué que le cadre numérique est privilégié avec la technique PE et le registre numérique exponentiel ou la technique PG et le registre calculatoire. Dans ce cadre, les techniques CE et NC ne sont pas préconisées puisqu'elles donnent de mauvais résultats. Toutefois, si l'on veut utiliser le cadre géométrique, c'est la technique PG avec le registre géométrique qui donne les meilleurs résultats.

De plus, nous avons constaté que, lors de la *résolution* des tâches, changer le moins possible (voir pas du tout) de registres permet de mieux réussir. En effet, le changement de registres risque d'engendrer des erreurs. Au contraire, lors de l'*enseignement* des nombres complexes, il est important d'effectuer de nombreux changements de registres car ces changements, s'ils ne sont qu'occasionnels, ne seront pas suffisants pour que les élèves aient une utilisation raisonnée des registres. Notons qu'en général, les changements de cadres et de registres ne posent pas de problèmes aux étudiants mais la difficulté est plutôt d'effectuer le choix adapté du cadre et du registre pour la tâche proposé. Nous pensons donc que lors de l'*enseignement* des nombres complexes, il est intéressant d'amener les étudiants à réfléchir et à travailler avec eux le choix du cadre et du registre le plus adapté à l'exercice demandé.

Chevallard conçoit les objets mathématiques (et donc les nombres complexes) comme une praxéologie composée de deux blocs, à savoir le bloc pratico-technique (avec un type de tâches et une technique) et le bloc technologico-théorie (avec une technologie et une théorie). Lors de l'*enseignement*, des praxéologies complètes sont, généralement, utilisées par l'enseignant lorsqu'il présente une matière. Cependant, nous avons constaté que lors de la *résolution* des deux tâches proposées, la moitié des étudiants ne laisse une trace écrite que du bloc pratico-technique, n'utilisant donc pas des praxéologies complètes. Nous pensons donc que l'usage des technologies et des théories (au sens de Chevallard) n'est pas totalement acquis par les étudiants.

Ensuite, les erreurs que les étudiants commettent le plus souvent sont les erreurs de calculs et d'approximations des paramètres intervenant dans la forme algébrique des nombres complexes. Cependant, ces erreurs ne sont pas les plus alarmantes selon nous. En effet, d'autres étudiants (une minorité) ont une mauvaise connaissance en géométrique, en trigonométrie (exemple : $\sin(75) = \sin(-75)$) mais aussi dans l'utilisation de la règle du parallélogramme et dans le passage d'un cadre à un autre. Il nous semble donc important que la maîtrise de la trigonométrie et de la géométrie vectorielle constitue un pré-requis pour l'enseignement des nombres complexes lorsqu'on veut effectuer des changements de cadres et de registres.

Pour terminer l'analyse du savoir appris, nous répondons à deux de nos questions de recherche, à savoir :

- Ces étudiants changent-ils facilement de cadres et de registres ?
- Ces étudiants choisissent-ils un cadre et un registre adaptés aux tâches proposées ?

Précédemment, nous avons mis en lumière la nécessité des représentations géométriques dans l'enseignement des nombres complexes, ce qui implique une importance des changements de cadres et de registres. Par l'analyse antérieure, nous avons constaté que les étudiants changent aisément de cadres et de registres lors de la résolution d'un exercice. Cependant, pour une tâche posée dans un cadre particulier, l'utilisation raisonnée de ces changements n'est pas toujours acquis, impliquant des choix de cadre et de registre non adaptés à la tâche.

Une proposition pour améliorer l'usage raisonné de ces changements est, par exemple, de prendre en compte cette variété de cadres et de registres lors des exercices et des évaluations proposés.

Deuxième partie

Vers une proposition d'enseignement

Chapitre 5

La mise à jour d'un manuel

Lors des chapitres précédents, les analyses à caractère épistémologique, du savoir enseigné et du savoir appris ont permis la mise en évidence de différents points auxquels l'enseignement des nombres complexes doit être attentif. Par exemple, comme Douady le dit, les changements de cadres sont importants, lors de l'*enseignement*, pour favoriser l'apprentissage des étudiants. Nous avons constaté, cependant, que lors de la *résolution* d'un exercice ou d'un problème, les étudiants ont intérêt à trouver rapidement le cadre le plus adéquat. Il en va de même concernant le registre (au sens de Duval) de la technique (au sens de Chevallard). Nous avons aussi mis en évidence la nécessité d'utiliser des représentations géométriques lorsque nous voulons enseigner cette matière. Afin de concrétiser les résultats de ces analyses, nous consacrons ce chapitre à une proposition d'enseignement par la mise à jour d'un manuel.

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de proposer une modification d'un chapitre sur les nombres complexes qui susciterait des changements de cadres et de registres judicieux. Ainsi, nous avons décidé d'améliorer le chapitre concernant les nombres complexes dans le syllabus des cours préparatoires en mathématiques destiné aux étudiants de mathématiques et de physique de l'université de Namur.

Selon les publics et les objectifs visés par l'enseignement, l'introduction des nombres complexes peut être réalisée selon différentes approches : il y a la façon « classique » algébrique mais aussi la façon géométrique (Rosseel et Schneider [8]). Notre choix, ici, est avant tout algébrique car lors des sessions préparatoires en mathématiques et en physique, l'enseignement des nombres complexes vise, entre autres, leur manipulation algébrique mais aussi l'introduction de structures algébriques. De plus, historiquement, les nombres complexes sont apparus lors de la résolution algébrique d'équations du troisième degré. L'analyse à caractère épistémologique ayant prouvé l'importance des représentations géométriques pour l'acceptation des nombres complexes comme entité mathématique dans le savoir savant, nous les utiliserons lors de la proposition de modifications. De plus, Douady préconise l'usage d'une variété de cadres lors de l'enseignement afin de faciliter l'apprentissage.

5.2 Proposition de modifications par rapport au plan du chapitre

Cette section présente les changements apportés du point de vue du plan du chapitre sur les nombres complexes (du syllabus des cours préparatoires). Le plan de ce chapitre, avant toute proposition de modifications, est décomposé comme suit.

1. Introduction

2. Définitions

3. Représentation géométrique et forme trigonométrique

- 3.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe
- 3.2 Module d'un nombre complexe
- 3.3 Argument d'un nombre complexe
- 3.4 Exemples

4. Addition et multiplication des nombres complexes

- 4.1 Définitions
- 4.2 Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$
- 4.3 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$
- 4.4 Propriétés du module
- 4.5 Corps des complexes
- 4.6 Exemples d'utilisation des opérations dans $\mathbb{C}$

5. Forme exponentielle des nombres complexes

- 5.1 L'expression $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)
- 5.2 Les trois formes d'un nombre complexe
- 5.3 Utilité de la forme exponentielle

6. Racine carrée d'un nombre complexe

7. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

8. Exercices

9. Solutions des exercices

FIGURE 5.1 – Ancien plan du chapitre du syllabus des cours préparatoires

Remarquons que le contenu de ce chapitre (de l'ancienne version) se trouve à l'annexe 1.

Les principales modifications apportées sur la structure du plan du chapitre des nombres complexes sont les suivantes. Notons que le plan modifié peut être visualisé aux pages 73-74.

- De manière générale, nous constatons que le cadre géométrique est faiblement présent. Il y a, en effet, peu de représentations géométriques annoncées dans ce plan. Après la lecture de ce chapitre, nous ne pouvons que confirmer ce manquement (par exemple, il n'y a pas de représentations géométriques pour la puissance $n^{\text{ième}}$). N'oublions pas qu'historiquement, les mathématiciens ont accepté les nombres complexes lorsqu'une représentation géométrique de ceux-ci est apparue. C'est pourquoi il est important de faire fréquemment référence au cadre géométrique et donc aux changements de cadres lors de l'enseignement des nombres complexes. Nous allons donc introduire une section propre à l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes.

- Nous remarquons que la forme algébrique n'apparaît pas explicitement dans les titres du plan ainsi que le passage d'une forme à une autre. En revanche, tout cela est bien présent dans le contenu de ce chapitre. Dans la proposition d'enseignement, nous ferons en sorte que ces deux éléments apparaissent dans le plan.

- Dans la modification du chapitre, la section 5 « forme exponentielle des nombres complexes » (de l'ancien plan) est placée avant la section sur l' « addition et la multiplication des nombres complexes » puisque nous voulons effectuer des changements de cadres et de registres pour faciliter la compréhension des étudiants et qu'en mathématiques, nous ne pouvons utiliser que ce qui a déjà été défini.

Concernant l'addition et la multiplication de nombres complexes (section 4 de l'ancien plan), elles sont présentées de telle sorte que les propriétés de ces opérations soient mises en évidence pour, ensuite, aboutir au corps des complexes. Nous décidons de ne pas toucher à cette structure car ce cours est à destination des étudiants en mathématiques et en physique de l'université de Namur, et les nombres complexes constituent un exemple d'ensemble sur lequel nous pouvons mettre différentes structures algébriques.

Enfin, nous décidons de laisser la section sur la « résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a = 0$) » à la fin du chapitre car les racines carrées des nombres complexes n'ont pas encore été vues et qu'en mathématiques, nous ne pouvons utiliser que ce qui a été défini.

5.3 Proposition de modifications du contenu du chapitre

Cette section présente les changements apportés sur le contenu afin d'améliorer la présentation des nombres complexes ainsi que l'ensemble du chapitre modifié.

Rappelons que l'enseignement proposé est destiné aux étudiants en mathématiques et en physique qui ont besoin dans un premier temps de manipuler algébriquement les nombres complexes (se référer à la section 5.1 de ce travail).

Les principales modifications apportées sur le contenu du chapitre des nombres complexes (du syllabus des cours préparatoires) sont les suivantes.

- Les parties plus historiques, notamment dans la section « Introduction », du chapitre ont été modifiées et explicitées. En effet, grâce à l'analyse à caractère épistémologie réalisée au début de ce mémoire, nous avons souligné l'inexactitude de certaines informations dans ce chapitre. Par exemple, les nombres complexes ne sont pas apparus dans le cadre de la résolution des équations du second degré mais lors de la résolution d'équations du troisième degré. De même, c'est grâce aux éléments développés dans la section 1 de ce travail que nous avons pu apporter certaines précisions concernant, par exemple, la représentation géométrique d'un nombre complexe.

- La manière d'amener et d'aborder les racines carrées et $n^{\text{ième}}$ a été modifiée. Avant les modifications, ces notions sont présentées comme suit : tout d'abord, une praxéologie basée sur la forme algébrique est proposée pour aborder les racines carrées mais seulement par la suite, une praxéologie basée sur la forme exponentielle est utilisée. Ensuite, pour effectuer la généralisation à la racine $n^{\text{ième}}$, c'est une praxéologie mettant en oeuvre la forme trigonométrique qui est utilisée mais il n'est nullement expliqué pourquoi utiliser cette forme. Nous préférons commencer par les racines $n^{\text{ième}}$ afin de particulariser, par après, aux racines carrées. Cela se justifie par le fait que la forme à privilégier pour calculer facilement les racines $n^{\text{ième}}$ est la forme exponentielle. Cependant, dans le cas particulier des racines carrées, la forme algébrique est tout aussi pratique. Remarquons que l'enseignant est libre de présenter ou non les racines $n^{\text{ième}}$ selon ses objectifs et le temps qu'il a à sa disposition.

- Nous avons effectué un apport de figures géométriques puisqu'il y avait un réellement manque de représentations géométriques (dans l'ancienne version du chapitre). Or, ces dernières sont essentielles car elles permettent d'effectuer des changements de cadres et de registres et donc d'améliorer la compréhension des étudiants. Remarquons que toutes les opérations possibles sur les nombres complexes (addition, soustraction, multiplication, les puissances, le conjugué, ...) sont maintenant représentées géométriquement (dans la version modifiée du chapitre). De plus, nous avons utilisé les vecteurs pour représenter géométriquement les nombres complexes car historiquement, les nombres complexes ont été représentés par des vecteurs et qu'il est plus facile, par exemple, d'additionner des vecteurs que des points. Nous avons aussi constaté qu'aucun énoncé d'exercices et d'exemples ne s'appuyait sur le cadre géométrique. C'est pourquoi nous avons ajouté des exercices et des exemples qui s'appuient sur le cadre géométrique.

- Sur base des différentes analyses effectuées auparavant, nous avons pu apporter un complément de remarques sur divers sujets. Entre autres, nous avons voulu insister sur le fait que le symbole $\sqrt{\ }$ ne pouvait jamais s'utiliser avec des nombres réels négatifs et des nombres complexes, sur la présence des coordonnées polaires et cartésiennes dans les différentes formes de ces nombres, ...

- Concernant les démonstrations de diverses égalités de la section 4.4 (dans la version non modifiée), nous les avons aussi développées avec la forme exponentielle afin d'obtenir des preuves plus simples et faire prendre conscience aux étudiants qu'il n'existe pas une seule manière de démontrer des théorèmes, des propositions, ... Notons que ces modifications vont au-delà de nos analyses.

- Nous avons décidé de supprimer le passage sur la multiplication scalaire et complexe de la page 222 du chapitre non modifié (se trouvant à l'annexe 1) car l'explication fournie n'est pas claire, étant donné que ces deux multiplications n'ont pas été définies auparavant.

- Nous avons développé les parties du manuel présentant l'inverse et le conjugué d'un nombre complexe, ainsi que le quotient de deux nombres complexes, avec la forme exponentielle de ces nombres. En effet, la forme exponentielle étant présentée plus tôt qu'auparavant dans le chapitre, il est maintenant possible d'utiliser cette forme pour interpréter plus facilement ces opérations.

- Nous avons introduit la définition de la forme trigonométrique d'un nombre complexe de telle sorte qu'un changement de cadres soit effectué pour faciliter la compréhension de cette notion.

Le plan ainsi que l'entièreté du chapitre modifié sur les nombres complexes peuvent être visualisés aux pages suivantes.

Chapitre 1

Les nombres complexes

Sommaire

1.1 Introduction

Chaque type de nombre permet de résoudre un type particulier d'équation et historiquement, les nombres complexes (appelés auparavant nombres imaginaires) sont apparus lorsque des racines carrées de nombres négatifs interviennent dans la résolution des équations du troisième degré.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est utilisé dans la numération. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, contenant l'ensemble $\mathbb{N}$, est constitué par les nombres solutions d'équations du type $z + b = a$, où a et b sont des entiers naturels. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, contenant l'ensemble $\mathbb{Z}$, est constitué par les nombres solutions d'équations du type $bz - a = 0$, où a et b sont des entiers naturels ; de même pour l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, contenant l'ensemble $\mathbb{Q}$, avec les équations du type $x^2 - 2 = 0$, par exemple (dont les solutions sont des nombres irrationnels). L'ensemble des nombres complexes désigné par $\mathbb{C}$ permet, lui, de résoudre une équation telle que, par exemple, $x^2 + 1 = 0$, et on verra plus loin (§1.2) que la relation suivante est correcte :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \underbrace{\subset \mathbb{C}} \ .$$

1.1.1 Introduction du nombre « i »

Considérons maintenant l'équation générale du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0 \ .$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme équivalente

$$a \left[x^2 + \frac{b}{a}\, x + \frac{c}{a} \right] = 0$$

ou encore, en divisant par $a \neq 0$ et en ajoutant $\underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0}$:

$$x^2 + 2\, \frac{b}{2a}\, x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

c'est-à-dire

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{1.1}$$

$\boxed{\text{Si } b^2-4ac=0}$, l'équation (1.1) admet une solution donné par

$$x=\frac{-b}{2a}.$$

$\boxed{\text{Si } b^2-4ac>0}$, l'équation (1.1) admet deux solutions données par

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ et } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

où $\sqrt{b^2-4ac}$ désigne la racine carrée positive du nombre positif b^2-4ac.

$\boxed{\text{Si } b^2-4ac<0}$, l'équation (1.1) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. On a en effet :

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}=\underbrace{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}_{<0}.$$

On observe que, pour déterminer $x+\frac{b}{2a}$ et donc x, il faudrait pouvoir calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

Selon certains historiens, c'est l'Italien Bombelli (vers 1560) qui eut l'idée d'envisager un nombre imaginaire dont le carré serait -1. On le note i. On a donc

$$\boxed{i^2=-1}$$

Cependant, il est important de remarquer qu'à l'époque de Bombelli, la notation utilisée pour la racine carrée de -1 n'était pas le nombre i. En effet, le symbolisme à cette époque était beaucoup plus compliqué. La notation i a été proposée par Euler, vers 1777, mais elle a été adoptée seulement lorsqu'une représentation géométrique des nombres complexes est apparue vers 1801 grâce au mathématicien Gauss Carl Friedrich.

On poursuivra la résolution de l'équation (1.1) au §1.9. On donne, à présent, une définition générale d'un nombre complexe.

1.2 Définition d'un nombre complexe et de sa forme algébrique

À partir de ce nombre i (tel que $i^2 = -1$), on peut définir ce qu'est un nombre complexe.

Définition 1

On appelle **nombre complexe** toute expression de la forme $z = a + ib$ $(= a + bi)$ dans laquelle a et b sont des nombres réels et i est le nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

a est appelé « **partie réelle** » et b est appelé « **partie imaginaire** » du nombre complexe $z = a + ib$.
On notera $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$.

La forme $z = a + ib$ d'un nombre complexe est appelée la **forme algébrique**.

L'**ensemble des nombres complexes** est noté $\mathbb{C}$.

Par exemple, pour le nombre complexe $z = 2 + (-3)i$ qui s'écrit aussi $z = 2 - 3i$, on a $\Re(z) = 2$ et $\Im(z) = -3$.

Remarque

- **Tout nombre réel peut être considéré comme un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle**. Le nombre $a \in I\!R$ peut, en effet, s'écrire $a + ib$ avec $b = 0$. D'autre part, les nombres complexes $a + bi$ tels que $a = 0$ seront appelés les « nombres purement imaginaires ». Ils sont donc du type « bi » avec $b \in \mathbb{R}$.

  On a bien que l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est une « extension » de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:
  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,.$$

- Le symbole $\sqrt{\ }$ ne peut être utilisé que pour des nombres réels positifs. On ne l'utilisera jamais avec des nombres réels négatifs ou des nombres complexes. On s'interdit d'écrire $\sqrt{-1}$. Historiquement, lors de l'utilisation cette notation, il fallait connaître par coeur la table des règles des signes de la multiplication dont, au moins, un des facteurs est la racine carrée de -1. Si on ne connait pas cette table, voici un exemple d'erreur qui peut se produire :

Chercher l'erreur . . .

$$\begin{aligned} \sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3} &= \sqrt{(-3)\cdot(-3)} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Or, on sait que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$

On devrait donc avoir $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}=-3$

Et ici, on arrive à $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}=\ 3$

le symbole $\sqrt{\ }$ doit être réservé seulement pour les nombres réels positifs. On **n'écrira jamais**, par exemple, $\sqrt{-8}$ ou $\sqrt{1-5i}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est identifié à l'ensemble des couples de nombres réels $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)\ ;\ a,b\in\mathbb{R}\}$.

Le résultat suivant est dès lors immédiat.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$a+ib=c+id \qquad \text{si et seulement si} \quad a=c \text{ et } b=d\ .$$

L'interprétation géométrique de l'égalité de deux nombres complexes sera vue au §1.7.

Exemples

- On a, par exemple, $2-9i=\frac{4}{2}+\left(-\frac{27}{3}\right)i$.
- On aura $x+iy=7-6i$ si et seulement si $x=7$ et $y=-6$.

- En particulier,

$$\begin{aligned} a+ib=0=0+0\cdot i \quad &\Leftrightarrow \quad a=b=0 \\ \text{et } a+ib\neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 0. \end{aligned}$$

1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.3.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Bien que l'on ait utilisé les nombres complexes depuis le milieu du XVIème siècle, ce n'est pas avant la fin du XVIIIème siècle que l'on leur donne une « représentation géométrique ». C'est le mathématicien Gaspar Wessel (1745-1818) qui eut l'idée d'introduire, pour cette représentation, un axe perpendiculaire à l'axe des réels - appelé « axe imaginaire » (voir à la FIGURE 1.1). Dans ce plan défini (rapporté à ce système d'axes), appelé aussi plan complexe, on peut associer à chaque nombre complexe $a + ib$ un et un seul *point* M dont les coordonnées sont (a, b) (voir à la FIGURE 1.1). Le point M est appelé l'**image** du nombre complexe $a + ib$ et celui-ci est appelé l'**affixe** du point M. L'axe horizontal est appelé l'**axe réel** et noté $\Re$; l'axe vertical est appelé l'**axe imaginaire** et noté $\Im$.

On peut aussi associer à un nombre complexe $z = a + ib$ le *vecteur* $\overrightarrow{OM}$ où O est l'origine du système d'axes et M est l'image du nombre complexe z défini ci-dessus.

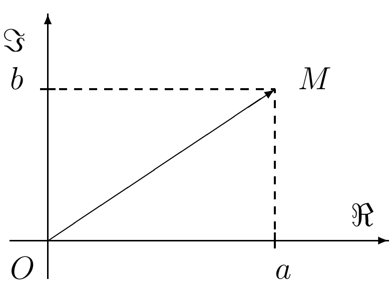


Figure 1.1. M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$

Tout nombre complexe $z = a + bi$ correspond donc à un couple (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre notation.

En particulier, on identifie

- les nombres réels avec les points de l'axe des abscisses, soit $a \equiv (a, 0)$;
- les nombres complexes imaginaires purs avec les points de l'axe des ordonnées, soit $bi \equiv (0, b)$.

Ceci signifie donc qu'on définit i par $\boxed{i \equiv (0, 1)}$ (car $i = 0 + i1$).

Remarque
Dans le plan complexe, le point M représentant le nombre complexe $z = a + ib$ peut être caractérisé par :

- ses coordonnées cartésiennes $(a,\, b)$;

  ou
- ses coordonnées polaires $(r,\, \theta)$;
  où r est encore appelé le module du nombre complexe et $r \geq 0$;
  θ est encore appelé l'argument du nombre complexe et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

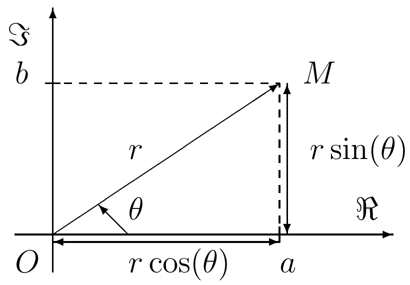


Figure 1.2. M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$

Les §1.3.2 et §1.3.3 sont consacrés à la définition du module et de l'argument d'un nombre complexe.

1.3.2 Module d'un nombre complexe

La représentation géométrique de la FIGURE 1.2 permet d'introduire le **module du nombre complexe** $z = a + ib$ **: c'est la norme du vecteur** $\overrightarrow{OM}$. On la note $|z|$. Le Théorème de Pythagore montre que $|z|^2 = a^2 + b^2$. On a donc :

Définition 2

Le **module** du nombre complexe $z = a + ib$ est la racine carrée positive de $a^2 + b^2$, c'est-à-dire

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Il s'agit aussi de la **norme du vecteur** $\overrightarrow{OM}$ représentant le nombre complexe z dans le plan. Par conséquence, le module d'un nombre complexe est **toujours positif**.

Si le nombre complexe z est l'affixe d'un point M dont les coordonnées polaires sont $(r,\,\theta)$, son module vaut $|z| = r$

Exemples :
À partir de la FIGURE 1.3, déduisez les deux nombres complexes z_1 et z_2 dont l'image est, respectivement, le point M et N et calculez leur module.

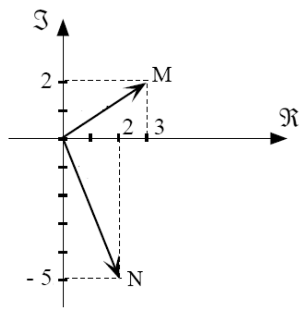


Figure 1.3: Représentation géométrique des nombres complexes z_1 et z_2 dont les images sont M et N, respectivement

- L'affixe du point M est $z_1 = 3 + 2i$ car les coordonnées cartésiennes du point M sont (3,2).

  Son module vaut : $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

- L'affixe du point N est $z_2 = 2 - 5i$ car les coordonnées cartésiennes du point N sont (2,-5).

  Son module vaut : $|2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

1.3.3 Argument d'un nombre complexe

La FIGURE 1.2 permet également d'introduire l'angle θ entre l'axe réel et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, mesuré positivement dans le sens antihorlogique. On l'appelle l'**argument** du nombre complexe $z = a + ib$. On le note arg (z). On remarque que

$$a = |z|\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad b = |z|\sin(\theta)$$

(par les propriétés des nombres trigonométriques dans un triangle rectangle).

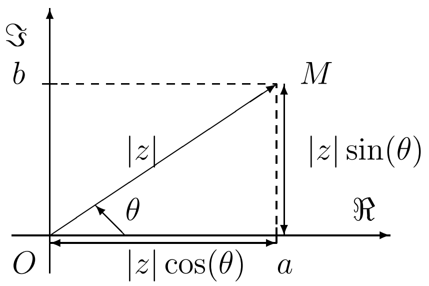


Figure 1.4. M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$

Remarque : l'argument d'un nombre complexe est défini à 2π près.
On a en effet :

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\theta) & = & \cos(\theta + 2k\pi) \\ \sin(\theta) & = & \sin(\theta + 2k\pi) \end{array}\right\} \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Cela signifie que l'on peut ajouter ou retrancher à l'argument d'un nombre complexe, un nombre entier de fois 2π, sans changer ce nombre. On a par exemple

- $$\begin{aligned} \cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{4}) &= \cos\left(\tfrac{3\pi}{4} - 2\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4} - 2\pi\right) \\ &= \cos\left(-\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{5\pi}{4}\right) \\ &= \cos(\tfrac{5\pi}{4}) - i\sin(\tfrac{5\pi}{4}) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + 4\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{6} + 4\pi\right) \\ &= \cos(\tfrac{25\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{25\pi}{6}) \end{aligned}$$

Sauf mention explicite du contraire, on travaillera avec des arguments θ satisfaisant à $0 \le \theta < 2\pi$.

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Si on se concentre sur la représentation géométrique d'un nombre complexe sous forme d'un point (comme vu précédemment), on sait qu'étant donné un repère, le point peut être caractérisé soit par des coordonnées cartésiennes soit par des coordonnées polaires. Attardons-nous sur ces dernières en explicitant les relations entre ces deux types de coordonnées à partir de la FIGURE 1.10.

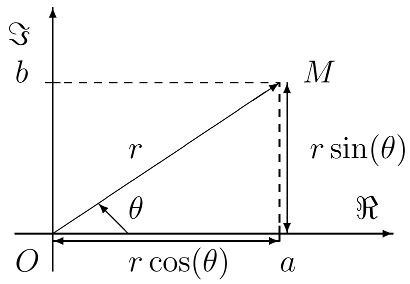


Figure 1.5. M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$

Soit (a, b) les coordonnées cartésiennes du point M représentant le nombre complexe z et (r, θ) ses coordonnées polaires.

Par le théorème de Pythagore (dans le triangle rectangle OMa), nous en déduisons que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. De plus, par les formules trigonométriques du sinus et cosinus dans un triangle rectangle, on obtiens que $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a = r\cos(\theta) \\ b = r\sin(\theta) \end{cases}$$

À partir de ces différentes relations, on peut définir la forme trigonométrique comme suit.

1.4.1 Définition

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut donc s'écrire sous la **forme trigonométrique** (en utilisant les coordonnées polaires) :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \ .$$

> En effet, on vient de voir que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.
>
> On a donc : $z = a + ib = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Inversement, si un nombre complexe est donné sous la forme $z = r\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in I\!R$, on peut l'écrire sous la forme $z = a + ib$, appelée **forme algébrique** comme indiqué dans la synthèse suivante.

1.4.2 Passage entre la forme algébrique et trigonométrique

Forme algébrique $\rightarrow$ **Forme trigonométrique**

$$z = a + ib \ \rightarrow \ z = r\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$\text{où} \begin{cases} r & = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ r \in \mathbb{R}^+; \\ \cos(\theta) & = \frac{a}{r}\ , \quad \text{si } r \neq 0\ ,\ \theta \in \mathbb{R}; \\ \sin(\theta) & = \frac{b}{r}\ , \quad \text{si } r \neq 0\ ,\ \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Forme trigonométrique $\rightarrow$ **Forme algébrique**

$$z = r\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \ \rightarrow \ z = a + ib$$

$$\text{où} \begin{cases} a & = r\cos(\theta)\ ,\ a \in \mathbb{R}; \\ b & = r\sin(\theta)\ ,\ b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.4.3 Exemples

(Ex.1) Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme trigonométrique.

(a) $\boxed{z_1 = 2 + 2i}$

- Le module de $z_1 = r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- L'argument de z_1, noté θ_1, est obtenu par

$$\cos(\theta_1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ,$$
$$\sin(\theta_1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ,$$

  ce qui donne $\theta_1 = 45° = \frac{\pi}{4}$ radians.
- La forme trigonométrique de z_1 est donc $z_1 = 2\sqrt{2}\,\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$.
- Sa représentation géométrique est donnée à la FIGURE 1.6.

(b) $\boxed{z_2 = -2i}$
On a $z_2 = 0 - 2i$.

- Le module de $z_2 = r_2 = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$.
- L'argument de z_2, noté θ_2, est obtenu par

$$\cos(\theta_2) = 0,$$
$$\sin(\theta_2) = -\frac{2}{2} = -1 \; ,$$

  ce qui donne $\theta_2 = 270° = \frac{3\pi}{2}$ radians.
- La forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = 2\,\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right)$.
- Sa représentation géométrique est donnée à la FIGURE 1.6.

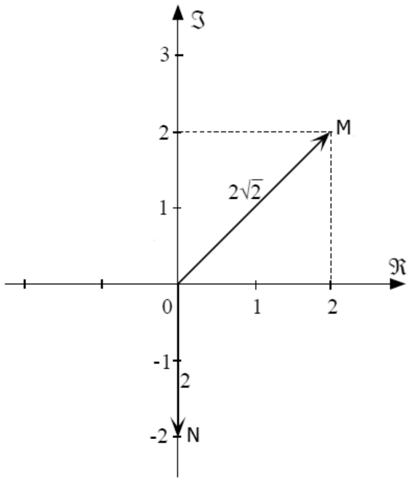


Figure 1.6: Représentation géométrique de z_1 et de z_2 dont les points M et N sont les images de z_1 et de z_2, respectivement

(Ex.2) Donner la forme algébrique du nombre complexe représenté géométriquement et l'écrire sous la forme trigonométrique.

(a) z_3

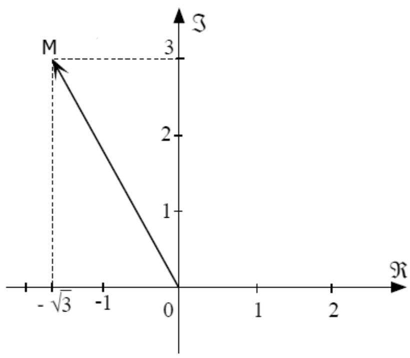


Figure 1.7. Représentation géométrique de z_3 dont le point M est son image

- La partir réelle et imaginaire du nombre complexe z_3 sont

$$a = -\sqrt{3};$$
$$b = 3.$$

- La forme algébrique de z_3 est donnée par

$$z_3 = -\sqrt{3} + 3i.$$

- Le module de $z_3 = r_3 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- L'argument de z_3, noté θ_3, est obtenu par

$$\cos(\theta_3) = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ ,$$
$$\sin(\theta_3) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

  ce qui donne $\theta_3 = 120° = \frac{2\pi}{3}$ radians.
- La forme trigonométrique de z_3 est donnée par

$$z_3 = 2\sqrt{3}\ \left(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3})\right).$$

(Ex.3) $\boxed{\text{Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme algébrique.}}$

(a) $z_4 = \sqrt{2}\ \big(\underbrace{\cos(\tfrac{3\pi}{4})}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{3\pi}{4})}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\big) = -1 + i.$

(b) $z_5 = \underbrace{\cos(\tfrac{4\pi}{3})}_{-\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{4\pi}{3})}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Les nombres complexes z_4 et z_5 sont représentés géométriquement à la FIGURE 1.8, dont les points M et N sont, respectivement, les images de z_4 et de z_5.

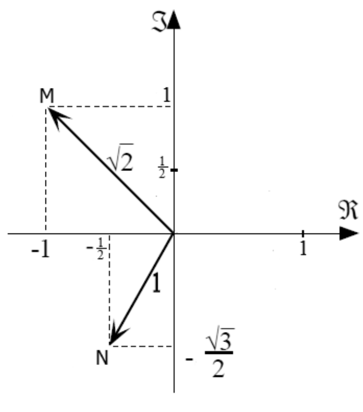


Figure 1.8. Représentation géométrique de z_4 et z_5

(Ex.4) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe représenté géométriquement à la FIGURE 1.9 et l'écrire sous la forme algébrique.

(a) z_6

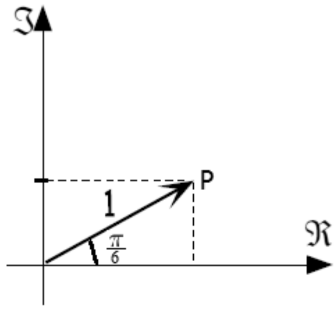


Figure 1.9. Représentation géométrique de z_6

- Les coordonnées polaires du nombre complexe z_6 sont

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$
$$r = 1$$

- La forme trigonométrique de z_6 est donnée par

$$z_6 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$$

- Les coordonnées cartésiennes du point P sont obtenues comme suit :

$$a = 1.\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$b = 1.\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

- La forme algébrique de z_6 est donnée par

$$z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

1.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

1.5.1 Rappel

Le développement du sinus et du cosinus, en série de Taylor, s'effectue comme suit :

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

1.5.2 L'expression $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

La fonction exponentielle e^x ($x \in \mathbb{R}$) peut s'écrire au moyen de la série de Mac Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Par analogie, on construit $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) formellement comme suit :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

En remarquant que

$$i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots = -1 \ ,$$
$$i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots = 1 \ ,$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots = -i \ ,$$
$$i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots = i \ ,$$

on obtient

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots}_{=\cos(\theta)} + i \ \underbrace{\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right]}_{=\sin(\theta)}$$

On reconnaît dans cette expression les séries de Taylor de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$. Ceci nous permet de définir $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) de la manière suivante :

Définition 3

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} : \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Grâce à cette définition, on peut définir une troisième forme des nombres complexes en utilisant les coordonnées polaires comme suit.

Définition 4

La forme exponentielle d'un nombre complexe z est

$$z = re^{i\theta}$$

où r et θ sont les coordonnées polaires associées à z.

Le nombre complexe $e^{i\theta}$ possède les propriétés suivantes :

Pour $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$:

- $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
- $|e^{i\theta}| = 1 = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

  Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est dit **unimodulaire**.
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Remarquez que les nombres de la forme $e^{i\theta}$ se manipulent comme des exponentielles dont la variable est réelle.

1.5.3 Les trois formes d'un nombre complexe

Soit le point M qui est l'image du nombre complexe z.

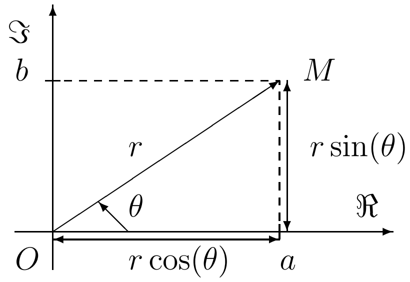


Figure 1.10. M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$

Ce nombre z peut être écrit sous différentes formes :

- forme trigonométrique : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
- forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
- forme algébrique : $z = a + ib$ avec $a,\, b \in \mathbb{R}$.
  Remarquons que la forme algébrique utilise les coordonnées cartésiennes du point M tandis que les deux autres formes utilisent les coordonnées polaires.

Les trois formes d'un nombre complexe sont résumées dans le cadre suivant.

$$z = \underbrace{a + ib}_{\substack{\text{forme}\\ \text{algébrique}}} = \underbrace{r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}_{\substack{\text{forme}\\ \text{trigonométrique}}} = \underbrace{r\,e^{i\theta}}_{\substack{\text{forme}\\ \text{exponentielle}}}$$

où $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, \quad a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta).$

Le passage d'une forme à l'autre a été vu au §1.4.2.

1.6 Addition et multiplication des nombres complexes

1.6.1 Définitions

L'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies par :

Définition 5

Soit $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ deux nombres complexes.

- L'addition de ces deux nombres est définie par :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\ (b + d)$$

- La multiplication de ces deux nombres est définie par :

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i\ (bc + ad)$$

ou si on travaille dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par l'identification vue au §1.3.1,

- L'addition : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- La multiplication : $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

L'interprétation géométrique de l'addition et de la multiplication est présentée au §1.7.

Remarques :

- Pour obtenir la somme de deux nombres complexes, il suffit donc d'additionner leurs parties réelles et leurs parties imaginaires. On a :

$$\begin{aligned} \Re\,(z_1 + z_2) &= \Re\,(z_1) + \Re\,(z_2)\ , \\ \Im\,(z_1 + z_2) &= \Im\,(z_1) + \Im\,(z_2)\ . \end{aligned}$$

  Ceci permet de comprendre aisément le lien avec la notation en couple :

$$z = a + bi \equiv (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a\underbrace{(1, 0)}_{\equiv 1} + b\underbrace{(0, 1)}_{\equiv i} \equiv a \cdot 1 + bi\ .$$

- Pour obtenir le produit, il suffit de « distribuer » les opérations de multiplication comme suit :

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{-1} bd \\ &= (ac-bd) + i\ (ad+bc)\end{aligned}$$

- La multiplication de deux nombres complexes est plus simple sous la forme exponentielle. En effet, soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, la multiplication de ces deux nombres est définie par, en utilisant les propriétés vues §1.6.2 :

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

  Ainsi, pour multiplier deux nombres complexes sous la forme exponentielle, il suffit d'additionner leurs arguments et de multiplier leurs modules.

Exemples :

- $(2+3i) + (-4+9i) = (2-4) + (3+9)i = -2+12i.$
- $(-1+5i)(9-2i) = -9 + 2i + 45i - 10\underbrace{i^2}_{-1} = 1 + 47i.$

On introduit la définition du conjugué d'un nombre complexe qui est utilisée dans la section suivante.

Définition 6

Le nombre complexe **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par

$$\overline{z} = a - ib\ .$$

Pour déterminer le conjugué d'un nombre complexe, il suffit donc de changer le signe de sa partie imaginaire. Par exemple, si $z = 3+2i$, on a $\overline{z} = 3-2i$.

Remarquons que le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est le nombre complexe lui-même, c'est-à-dire

$$\overline{\overline{z}} = z\ .$$

Si

$$z = a + ib \ ,$$

on a en effet,

$$\overline{z} \ = \ a + i(-b)$$

et

$$\overline{\overline{z}} \ = \ a + i[-(-b)] = a + ib \ .$$

L'interprétation géométrique du conjugué d'un nombre complexe (sous la forme algébrique mais aussi exponentielle et trigonométrique) sera vue au §1.7.

1.6.2 Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$

- L'**addition** des nombres complexes est :
  - **commutative :** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
  - **associative :** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$

- Il existe un nombre complexe, noté 0, tel que

$$z + 0 = 0 + z = z \qquad (\ z \in \mathbb{C}\ )$$

  Ce nombre est $0 = 0 + 0i$ (c'est le nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont nulles).

- Le nombre $(-a) + i(-b)$ est tel que

$$[(-a) + i(-b)] + [a + ib] = 0 \ .$$

  On le note $-(a + ib)$ et il est appelé l'**opposé** de $a + ib$. L'interprétation géométrique de l'opposé est présentée au §1.7.

- On peut également vérifier que « **le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués** » :

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \ .}$$

En effet : Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$

$$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (a+c) - i(b+d)$$
$$\overline{z_1} = a - ib \text{ et } \overline{z_2} = c - id \quad \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = (a+c) - i(b+d)$$

$\Rightarrow$ On a bien que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

L'interprétation géométrique de la propriété précédente est présentée au §1.7.

1.6.3 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$

- La **multiplication** dans les nombres complexes est :
  - **commutative :** $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ $\quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
  - **associative :** $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ $\quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$
  - **distributive par rapport à l'addition :**
    $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ $\quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$
- Il existe un nombre complexe, noté 1, tel que

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

Ce nombre est $1 = 1 + 0i$ (c'est le nombre complexe dont la partie réelle vaut 1 et la partie imaginaire vaut 0, soit le couple $(1, 0)$).

- **L'inverse d'un nombre complexe sous la forme algébrique.**
  Pour tout nombre complexe $a + ib \neq 0$, il existe un nombre complexe $c + id$ tel que

$$(a + ib)(c + id) = 1.$$

Pour le déterminer, il suffit d'effectuer le produit $(a + ib)(c + id)$.
On obtient $(ac - bd) + i\ (bc + ad) = 1 + i0$, ce qui donne

$$\begin{cases} ac - bd = 1, \\ bc + ad = 0. \end{cases}$$

qui est un système de deux équations à deux inconnues c et d, admettant une et une seule solution puisque son déterminant vaut a^2+b^2 qui est non nul (car $a+bi \neq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \neq 0$).

En multipliant la première égalité par a, la deuxième par b et en les additionnant, on obtient

$$(a^2+b^2)\ c = a$$

ce qui donne

$$c = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad d = \frac{-b}{a^2+b^2}\ .$$

On a donc

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}} \tag{1.2}$$

La formule (1.2) peut également s'écrire

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} & \qquad (\ z \in \mathbb{C}\ ,\ z \neq 0\ ) \\[2em] |z|^2 & = & z\ \overline{z} & \qquad (\ z \in \mathbb{C}\ ) \end{array}}$$

L'inverse d'un nombre complexe sous le forme exponentielle.
En utilisant la forme exponentielle, l'inverse du nombre complexe $z = re^{i\theta}$ est défini par

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}} \tag{1.3}$$

L'usage de la forme exponentielle permet d'interpréter plus facilement l'inverse d'un nombre complexe comme étant l'inverse de son module et l'opposé de son argument.

Remarque :
Comme avec la forme exponentielle, deux nombres sous la forme trigonométrique sont inverses l'un de l'autre si les modules sont l'inverse l'un par rapport à l'autre et les arguments sont opposés.

Si $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Alors son inverse est $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

- **Le quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique**
  Le ≪ quotient ≫ de $z = a + ib$ **par** $w = c + id \neq 0$ est noté $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id}$ et est défini par
  $$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = (a+ib)\ \frac{1}{c+id}$$
  ce qui donne, grâce à 1.2
  $$\boxed{\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}\ .} \tag{1.4}$$
  Remarquons que l'expression 1.4 est également obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{a+ib}{c+id}$ par $c - id$, le binôme conjugué de $c + id$.
  On a
  $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}.$$
  Ainsi, l'inverse se calcule au moyen de la même astuce :
  $$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$
  Le quotient de deux nombres complexes sous forme exponentielle
  Avec la forme exponentielle, le quotient de $z = r_z e^{i\theta_z}$ par $w = r_w e^{i\theta_w}$ est défini par
  $$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{r_z e^{i\theta_z}}{r_w e^{i\theta_w}} = \frac{r_z}{r_w} e^{i(\theta_z - \theta_w)}.} \tag{1.5}$$
  L'usage de la forme exponentielle permet d'interpréter plus rapidement le quotient de deux nombres complexes comme étant la soustraction des arguments et le quotient des modules de ces deux nombres.

- On peut également vérifier que ≪ **le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués** ≫, c'est-à-dire
  $$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ .}$$
  En effet : Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$
  $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) &\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) \\ \overline{z_1} = a - ib \text{ et } \overline{z_2} = c - id \qquad &\Rightarrow \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) \end{aligned}$$
  $\Rightarrow$ On a bien que $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

  L'interprétation géométrique de la propriété précédente est faite au §1.7

- **La n-ième puissance d'un nombre complexe** z est définie par

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fois}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$z^0 = 1 \qquad \text{(convention)}.$$

On a les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ n, p \in \mathbb{N} : & z^n\ z^p & = & z^{n+p}, \\ & (z^n)^p & = & z^{np}. \end{array}}$$

i.e. $zz^{-1} = 1$. Le nombre z^{-1} est appelé l'**inverse** de z et est noté

$$z^{-1} = \tfrac{1}{z} = \tfrac{1}{a+bi}.$$

1.6.4 Propriétés du module

On démontre le théorème suivant :

Théorème 1

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : & |z_1 \cdot z_2| & = & |z_1| \cdot |z_2|\ , \\ & \arg(z_1 z_2) & = & \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (\text{modulo } 2\pi\ ). \end{array}}$$

Deux preuves démontrant le théorème 1 vont être présentées, une se basant sur la forme exponentielle et l'autre sur la forme trigonométrique.

Preuve : si on utilise la forme exponentielle, soit

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ &= r e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |z_1| &= r_1, \\ |z_2| &= r_2, \\ |z_1 \cdot z_2| &= r \;=\; r_1 r_2, \\ \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \arg(z_1) &= \theta_1, \\ \arg(z_2) &= \theta_2, \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta \;=\; \theta_1 + \theta_2, \qquad (\text{modulo } \; 2\pi \;), \\ \Rightarrow \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \qquad (\text{modulo } \; 2\pi \;).\blacksquare \end{aligned}$$

On peut refaire cette preuve en utilisant la forme trigonométrique. Cependant, comme on va le voir, la démonstration est plus longue. C'est pourquoi la forme exponentielle est plus pratique lorsqu'on travaille avec la multiplication. En utilisant la forme trigonométrique, le théorème 1 se démontre comme suit.

Preuve :

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2). \end{cases}$$

alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \Big] \\ &= r_1 r_2 \Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \Big] \\ &= r[\cos\theta + i\sin\theta] \;. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |z_1| &= r_1, \\ |z_2| &= r_2, \\ |z_1 \cdot z_2| &= r \;=\; r_1 r_2, \\ \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \arg(z_1) &= \theta_1, \\ \arg(z_2) &= \theta_2, \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta \;=\; \theta_1 + \theta_2, \qquad (\text{modulo } \ 2\pi\ ), \\ \Rightarrow \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \qquad (\text{modulo } \ 2\pi\ ).\blacksquare \end{aligned}$$

On peut démontrer de même :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : & \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| & = & \dfrac{|z_1|}{|z_2|} & (\ z_2 \neq 0\ ) \\ & |\overline{z_1}| & = & |z_1|\ , & \\ ! & |z_1 + z_2| & \neq & |z_1| + |z_2| & (\text{en général}) \end{array}}$$

Le théorème 1 nous permet de démontrer également la formule de Moivre suivante :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si} & z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) & n \in \mathbb{N}_0, \\ \text{alors} & z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). & \end{array}}$$

Preuve : si on utilise la forme trigonométrique, la démonstration se fait par récurrence.

a) Montrons que cette relation est vraie pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} z^n \;=\; z &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \qquad (\text{par hypothèse}) \\ &= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \end{aligned}$$

b) Supposons que la relation soit vraie pour n, et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$: on suppose que

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

alors

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n \cdot z &= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)) \end{aligned}$$

par le théorème précédent. ∎

Remarque : on aurait pu utiliser la forme exponentielle.

Si	$z = re^{i\theta}$	$n \in \mathbb{N}_0$,
alors	$z^n = r^n e^{in\theta}$.	

La preuve est directe par les propriétés du nombre complexe $e^{i\theta}$ (vues au §1.5.2). En effet :

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

On constate, de nouveau, que la forme exponentielle est plus pratique lorsqu'on travaille les puissances d'un nombre complexe.

1.6.5 Corps des complexes

En résumé, on peut citer le théorème suivant :

Les nombres complexes $\mathbb{C}$ forment un corps (commutatif) avec les propriétés suivantes pour $z, w, s \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lrcll}
\textbf{Addition :} & z+w & = & w+z, & \\
 & z+(w+s) & = & (z+w)+s, & \\
 & z+0 & = & z, & \\
 & z+(-z) & = & 0. & \\
\textbf{Multiplication :} & zw & = & wz, & \\
 & (zw)s & = & z(ws), & \\
 & z\cdot 1 & = & z, & \\
 & z(z^{-1}) & = & 1 & \forall z \neq 0. \\
\textbf{Distributivité :} & z(w+s) & = & zw+zs. &
\end{array}$$

et la **multiplication scalaire** *(par un nombre réel).*

1.6.6 Exemples d'utilisation des opérations dans $\mathbb{C}$

1. $(3-i\sqrt{5})(4-2i\sqrt{5}) = 12 - 6i\sqrt{5} - 4i\sqrt{5} + 2i^2(\sqrt{5})^2 = 2 - 10i\sqrt{5}$
2. $\dfrac{1+i}{2+i} = \dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+2i-i^2}{4-i^2} = \dfrac{3+i}{5}$
3. $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = [1+2i+i^2]^2 = [2i]^2 = 4i^2 = -4$
4. $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$
5. Calculer $|z|$, $\Re(z)$, $\Im(z)$ lorsque

$$z = \frac{z_1}{z_2}\cdot\overline{z_3}\,, \qquad z_1 = 1+i\ ,\ z_2 = 2-3i\ ,\ z_3 = -5+4i\ .$$

   - Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de calculer $\Re(z)$ et $\Im(z)$ pour évaluer

$|z|$. On a en effet :

$$|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_3|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{41}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{82}{13}}\,.$$

- $z = \dfrac{(1+i)(-5-4i)}{2-3i} = \dfrac{-1-9i}{2-3i} = \dfrac{(-1-9i)(2+3i)}{13} = \dfrac{25-21i}{13}$,

  ce qui donne : $\Re\,(z) = \frac{25}{13}$ et $\Im\,(z) = \frac{-21}{13}$.

6. $\dfrac{1+i}{(1-i)^2} = \dfrac{1+i}{1-2i+i^2} = \dfrac{1+i}{-2i} = \dfrac{(1+i)\,i}{-2i^2} = \dfrac{i+i^2}{2} = \dfrac{-1+i}{2}$

7. $$\begin{aligned} \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} &= \frac{1+3i^2+3i+i^3}{[(1+i\sqrt{3})^2]^2} = \frac{-2+2i}{[-2+2i\sqrt{3}]^2} \\ &= \frac{-2+2i}{-8-8i\sqrt{3}} = \frac{1-i}{4+4i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{4(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}{4(1-3i^2)} = \frac{1-\sqrt{3}}{16} - i\frac{1+\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} \left[\frac{i(i-1)}{5+i}\right]^2 &= \left[\frac{-1-i}{5+i}\right]^2 = \left[\frac{(-1-i)(5-i)}{25-i^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{-6-4i}{26}\right]^2 = \left[\frac{-3-2i}{13}\right]^2 = \frac{5+12i}{169} \end{aligned}$$

1.7 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

1.7.1 Addition et soustraction

- **Addition de deux nombres complexes**

  Précédemment, au §1.6.1, on a vu que l'addition de deux nombres complexes sous la forme algébrique est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{soit } z_1 &= a + ib, \\ z_2 &= c + id, \\ \text{alors } z_1 + z_2 &= (a + c) + i(b + d). \end{aligned}$$

  On en déduit que si l'image de z_1 est le point $A = (a, b)$ et l'image de z_2 est le point $B = (c, d)$, alors l'image de $z_1 + z_2$ est le point C du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(a + c, b + d)$.

  Dès lors, si l'on représente géométriquement les nombres complexes sous la forme d'un vecteur, on a que les nombres complexes :

  – z_1 peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de composantes (a, b),

  – z_2 peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OB}$ de composantes (c, d),

  – $z_1 + z_2$ peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ de composantes $(a + c, b + d) = (a, b) + (c, d)$.

  En conséquence, additionner deux nombres complexes z_1 et z_2 se traduit géométriquement par l'addition vectorielle (en utilisant la règle du parallélogramme) des deux vecteurs représentant les nombres complexes à additionner (se référer à la FIGURE 1.11).

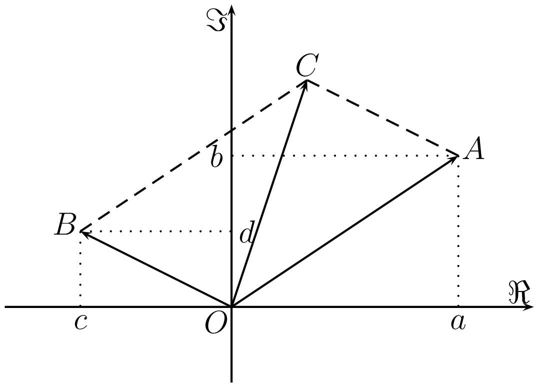


Figure 1.11: Addition de deux nombres complexes z_1 et z_2 dont les points A et B sont les images de z_1 et de z_2 et le point C est l'image du nombre complexe $z_1 + z_2$

- **Soustraction de deux nombres complexes**
  De même, la soustraction de deux nombres complexes sous la forme algébrique est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{soit } z_1 &= a + ib, \\ z_2 &= c + id, \\ \text{alors } z_1 - z_2 &= (a - c) + i(b - d). \end{aligned}$$

On en déduit que si l'image de z_1 est le point $A = (a, b)$ et l'image de z_2 est le point $B = (c, d)$, alors l'image de $z_1 - z_2$ est le point C du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(a - c, b - d)$.

Dès lors, si l'on représente géométriquement les nombres complexes sous la forme d'un vecteur, on a que les nombres complexes :

- z_1 peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de composantes (a, b),
- z_2 peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OB}$ de composantes (c, d),
- $z_1 - z_2$ peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ de composantes $(a - c, b - d) = (a, b) - (c, d)$.

En conséquence, soustraire deux nombres complexes z_1 et z_2 se traduit géométriquement par l'addition vectorielle (en utilisant la règle du parallélogramme) du premier vecteur avec l'opposé du deuxième vecteur (se référer à la FIGURE 1.16).

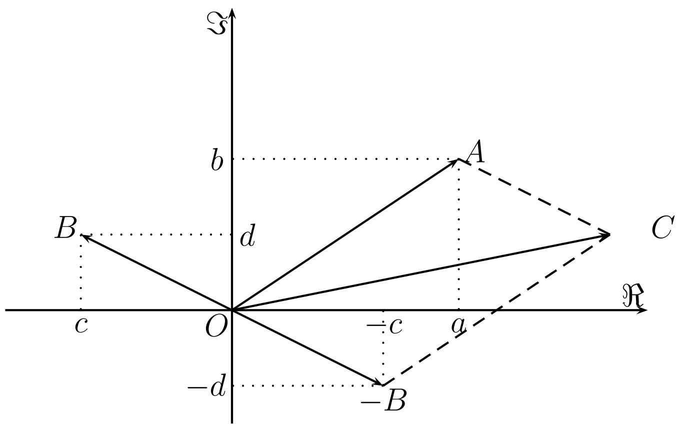


Figure 1.12: Soustraction de deux nombres complexes z_1 et z_2 dont les points A et B sont les images de z_1 et de z_2 et le point C est l'image du nombre complexe $z_1 - z_2$

- **Opposé d'un nombre complexe**

  L'opposé d'un nombre complexe est donné par :

$$\begin{aligned} &\text{soit } z = a + ib, \\ &\text{alors } -z = -a - ib. \end{aligned}$$

On en déduit que si l'image de z est le point $A = (a, b)$, alors l'image de $-z$ est le point B du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(-a, -b)$.

Dès lors, si l'on représente géométriquement les nombres complexes sous la forme d'un vecteur, on a que les nombres complexes :

- z peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de composantes (a, b),
- $-z$ peut être représenté géométriquement par le vecteur $\overrightarrow{OB}$ de composantes $(-a, -b) = -(a, b)$.

En conséquence, géométriquement, l'opposé $-z$ d'un nombre complexe z est obtenu en prenant l'opposé du vecteur représentant z.

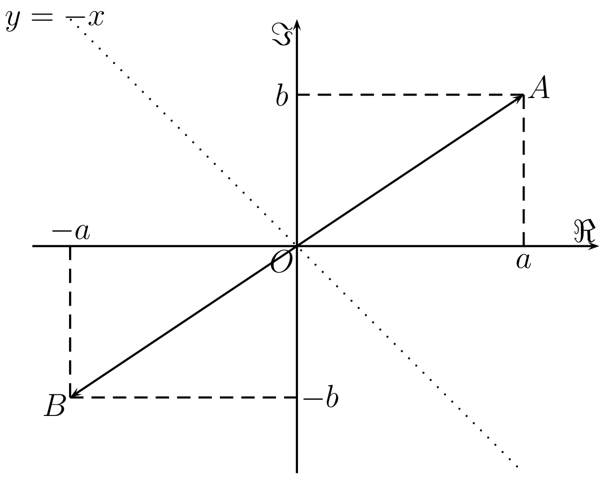


Figure 1.13: Opposé d'un nombre complexe z dont le point A est l'image de z et le point B est l'image de $-z$

1.7.2 Multiplication et division

La forme exponentielle des nombres complexes permet d'effectuer très facilement les opérations de conjugaison, de multiplication, de division. Elle fournit également une interprétation géométrique immédiate de ces opérations.

- **Produit et quotient de deux nombres complexes**

Soient $z_1 = r_1\ e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2\ e^{i\theta_2}$.
On a

(1) $z_1\ z_2 = r_1\ r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Le **produit** de deux nombres complexes est le nombre complexe dont

(a) le **module** est le **produit** des modules des deux nombres ;

(b) l'**argument** est la **somme** des arguments des deux nombres (modulo 2π).

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Le **quotient** de deux nombres complexes est le nombre complexe dont

(a) le **module** est le **quotient** des modules des deux nombres ;

(b) l'**argument** est la **différence** des arguments des deux nombres (modulo 2π).

L'interprétation géométrique de ces opérations est donnée aux FIGURES 1.14 et 1.15. Notons que le point « "$M_1 \cdot M_2$" » est le point représentant le produit des deux nombres complexes z_1 et z_2, où M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2, respectivement. Il en va de même pour le quotient de ces deux nombres. Pour la suite de cette section 1.7, nous utiliserons cette notation avec les guillemets dans les représentations géométriques.

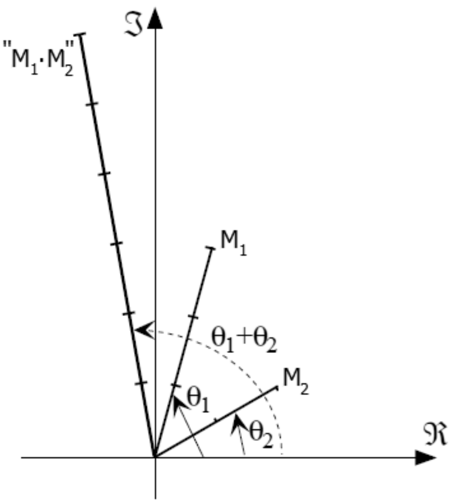


Figure 1.14: Représentation du produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 dont les point M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

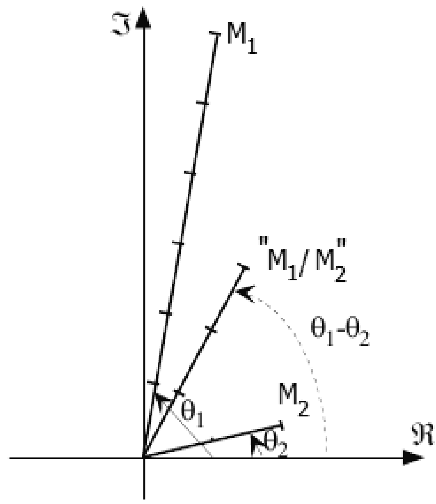


Figure 1.15: Représentation du quotient de deux nombres complexes z_1 et z_2 dont les point M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

- **Puissance d'un nombre complexe**

  Soit $z = re^{i\theta}$

  Calculons z^n où $n \in \mathbb{N}_0$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Soient $z = r\ e^{i\theta}$ et $n \in I\!N_0$.
On a

$$z^n = r^n\ e^{in\theta}.$$

- Le **module** de z^n est égal à $|z|^n = r^n$.
- L'**argument** de z^n est l'argument de z multiplié par n (modulo 2π).

L'interprétation géométrique de la puissance d'un nombre complexe est donnée à la Figure 1.16.

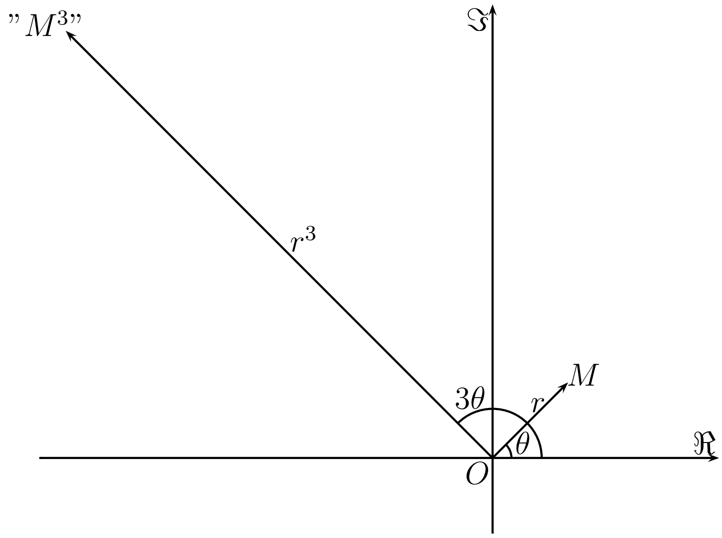


Figure 1.16. Puissance d'un nombre complexe z dont le point M est l'image de z

- **Conjugué d'un nombre complexe**

On va utiliser les trois formes (algébrique, exponentielle et trigonométrique) d'un nombre complexe pour résumer les résultats concernant le conjugué d'un nombre complexe.

Précédemment, à la section 1.6.1, nous avons défini le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ sous la forme algébrique comme étant $\overline{z} = a - ib$.

Maintenant, on va utiliser les formes trigonométrique et exponentielle pour définir le conjugué d'un nombre complexe.

Soit $z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$.

Calculons son conjugué $\overline{z}$

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= a - ib \quad \text{(par définition)} \\
&= r\cos(\theta) - ir\sin(\theta) \quad \text{(par les relations } a = r\cos(\theta) \text{ et } b = r\sin(\theta)\text{)} \\
&= r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\
&= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \quad \text{(par les propriétés des angles opposés)} \\
&= re^{i(-\theta)} \\
&= re^{-i\theta}
\end{aligned}
$$

Soit $z = a + ib$.
Le conjugué du nombre complexe

- sous la forme algébrique $z = a + ib$ est

$$\overline{z} = a - ib.$$

1. La **partie réelle** de $\overline{z}$ est la partie réelle de z.
2. La **partie imaginaire** de $\overline{z}$ est l'opposé de la partie imaginaire de z.

- sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ est

$$\overline{z} = re^{-i\theta}.$$

1. Le **module** de $\overline{z}$ est le module de z.
2. L'**argument** de $\overline{z}$ est l'opposé de l'argument de z (modulo 2π).

- sous la forme exponentielle $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est

$$\overline{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)).$$

L'interprétation géométrique du conjugué d'un nombre complexe est donnée à la FIGURE 1.17.

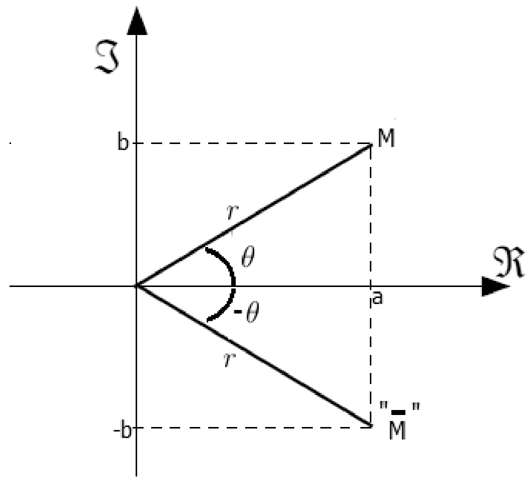


Figure 1.17: Représentation du conjugué d'un nombre complexe z dont le point M est l'image de z

- **Conjugué d'une somme de deux nombres complexes**

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ .}$$

L'interprétation géométrique de la propriété précédente est faite aux FIGURES 1.18 et 1.19).

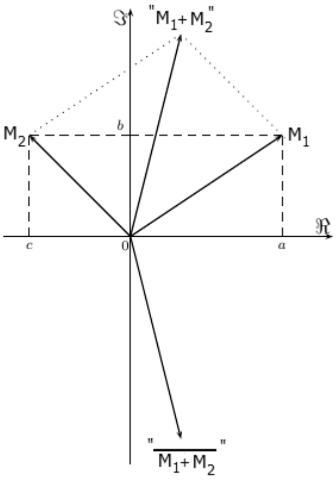


Figure 1.18: Représentation de la somme des conjugués de deux nombre complexe z_1 et z_2 dont les points M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

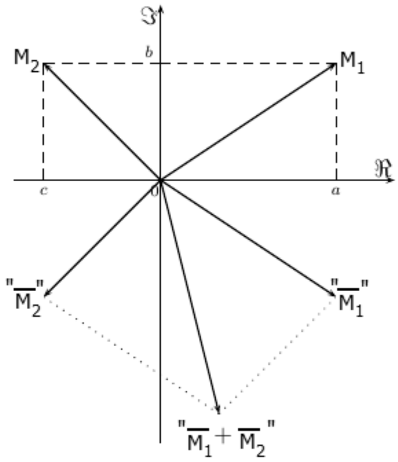


Figure 1.19: Représentation du conjugué d'une somme de deux nombre complexe z_1 et z_2 dont les points M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

- **Conjugué d'un produit de deux nombres complexes**

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ .}$$

L'interprétation géométrique de la propriété précédente est faite aux FIGURES 1.20 et 1.21.

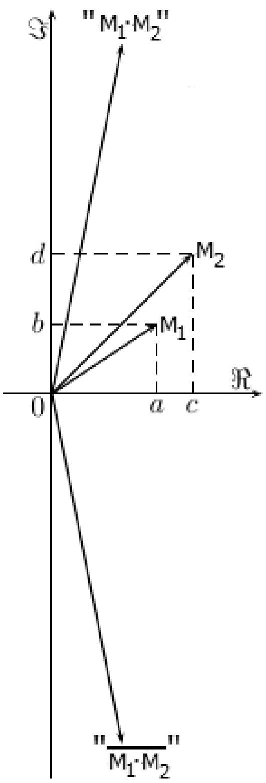


Figure 1.20: Représentation du produit des conjugués de deux nombre complexe z_1 et z_2 dont les points M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

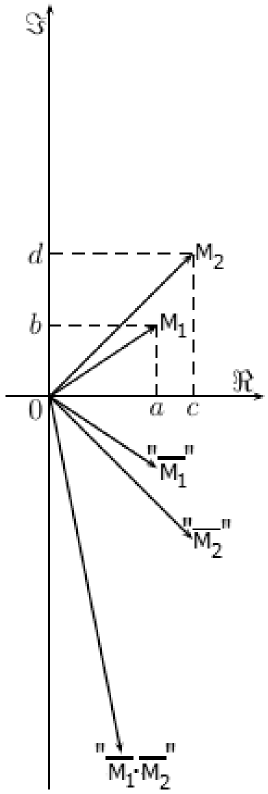


Figure 1.21: Représentation du conjugué d'une somme de deux nombre complexe z_1 et z_2 dont les points M_1 et M_2 sont les images de z_1 et de z_2

- **Égalité de deux nombres complexes**

Considérons les nombres complexes z_1 et z_2 sous la forme exponentielle :

$$z_1 = r_1\, e^{i\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$$

avec $r_1, r_2 \geq 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in I\!R$. La représentation géométrique décrite à la FIGURE 1.22 permet de voir que

$$\boxed{r_1\, e^{i\theta_1} = r_2\, e^{i\theta_2} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \quad \text{et} \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad (\ k \in \mathbb{Z}\ ). \end{cases}}$$

Deux nombres complexes sont donc égaux si et seulement si ils ont le même module et si leurs arguments respectifs diffèrent d'un multiple de 2π.

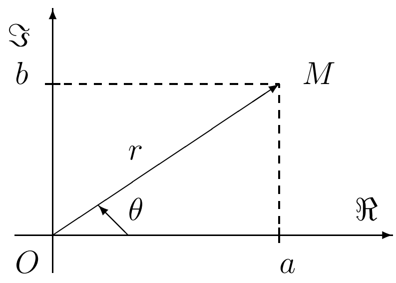


Figure 1.22. M est l'image du nombre complexe $z = re^{i\theta}$

- **Exercice 1 :** que devient l'argument d'un nombre complexe lorsqu'on multiplie ce dernier par i ? Représentez géométriquement.

  Solution : soit $z = r\ e^{i\theta}$. On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

  Par conséquent, $iz = r\ e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ et donc,

$$\arg\,(iz) = \arg\,(z) + \tfrac{\pi}{2}.$$

Géométriquement, on a :

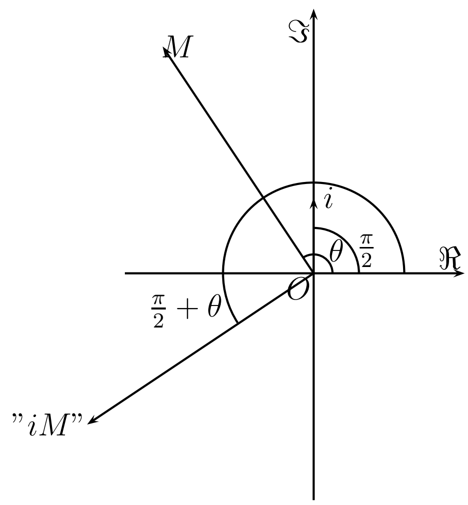


Figure 1.23: Représentation de la multiplication d'un nombre complexe z par i dont le point M est l'image de z

Donc multiplier un nombre complexe par i revient à effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ radians.

- **Exercice 2 :** que devient l'argument d'un nombre complexe lorsqu'on divise ce dernier par i ? Représentez géométriquement.

  Solution : soit $z = r\ e^{i\theta}$. On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

  Par conséquent, $\frac{z}{i} = \frac{re^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = re^{\theta-\frac{\pi}{2}}$ et donc,

$$\arg\left(\frac{z}{i}\right) = \arg(z) - \frac{\pi}{2}.$$

  Géométriquement, on a :

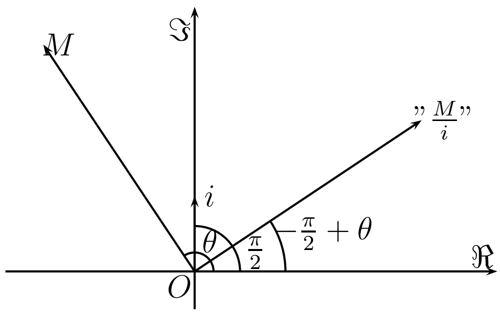


Figure 1.24: Représentation de la division d'un nombre complexe z par i dont le point M est l'image de z

Donc diviser un nombre complexe par i revient à effectuer une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ radians.

1.8 Racines $n^{\text{ième}}$ et racines carrées d'un nombre complexe

Dans la section 1.8.1, on va définir et représenter géométriquement les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, où n est un entier strictement positif.

Dans la section 1.8.2, on va voir un cas particulier (de la section 1.8.1) lorsque n vaut 2, à savoir les racines carrées.

1.8.1 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Définition 7

Le nombre complexe u est **racine** $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe $z \quad \Leftrightarrow \quad u^n = z.$

La forme exponentielle est à privilégier dans le calcul des racines $n^{\text{ièmes}}$.

Écrivons les nombres complexes z et u sous forme exponentielle :

$$z = r\ e^{i\theta} \quad \text{et} \quad u = \rho\ e^{i\alpha}.$$

Le nombre complexe u est racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe z si et seulement si

$$\rho^n\ e^{ni\alpha} = r\ e^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à dire : $\rho^n = r$ et $n\alpha = \theta + 2k\pi \quad (\ k \in \mathbb{Z}\ ),$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} & \text{(la quantité } \rho \text{ est le module de } u\text{, elle doit donc être } \geq 0) \\ \text{et} \quad \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} & (\ k \in \mathbb{Z}\ ). \end{cases}$$

On a donc

$$u = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad (\ k \in \mathbb{Z}\ ).$$

En faisant varier k dans $\mathbb{Z}$, on obtient les différentes racines $n^{\text{ièmes}}$ u_k de z, à savoir

- $k = 0$: $\quad u_0 = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta}{n}}$

- $k = 1$: $u_1 = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$
- $k = 2$: $u_2 = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right)}$
- $\dots$ $\dots$
- $k = n-1$: $u_{n-1} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}$
- $k = n$: $u_n = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+n\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} = u_0$
- $k = n+1$: $u_{n+1} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n+1)\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} = u_1$
- $k = -1$: $u_{-1} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(-1)\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)} = u_{n-1}$
- $k = -2$: $u_{-2} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(-2)\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-2)\frac{2\pi}{n}\right)} = u_{n-2}$
- $\dots$

On remarque que les valeurs successives $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ et $k = -1, -2, -3, \cdots$ conduisent à n nombres complexes distincts :

$$u_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad \text{où} \quad k = 1, 2, \dots, n$$
$$\text{(ou encore} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

En conclusion :

Le nombre complexe $z = r\ e^{i\theta}$ ($r \geq 0$) possède n racines $n^{\text{ième}}$, à savoir

$$u_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad \text{où} \quad k = 1, 2, \dots, n$$
$$\text{(ou encore} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

L'interprétation géométrique des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z est présentée à la FIGURE 1.25, dans le cas où n vaut 5.

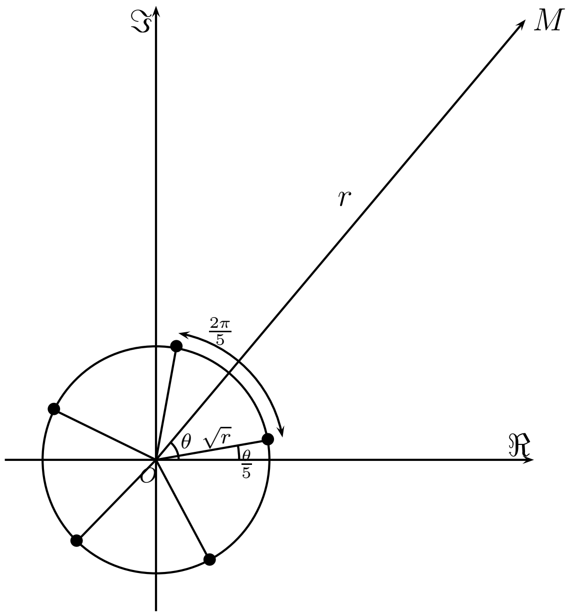


Figure 1.25: Représentation des racines 5$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z dont le point M est l'image de z

Exercices :

1. Quelles sont les solutions de l'équation $z^3 = 1$ dans les complexes. Représentez-les géométriquement.

2. Calculez les huit racines 8$^{\text{ième}}$ de $z = 6561 e^{\frac{2\pi}{3} i}$ dans les complexes. Représentez-les géométriquement.

1.8.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 8

Le nombre complexe u est **racine carrée** du nombre complexe $z \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = z$.

La forme exponentielle se prête aisément au calcul des racines carrées d'un nombre complexe. Écrivons les nombres complexes z et u sous forme exponentielle :

$$z = r\ e^{i\theta} \quad \text{et} \quad u = \rho\ e^{i\alpha}.$$

Le nombre complexe u est racine carrée du nombre complexe z si et seulement si

$$\rho^2\ e^{2i\alpha} = r\ e^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à $\rho^2 = r$ et $2\alpha = \theta + 2k\pi \quad (\ k \in \mathbb{Z}\ )$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r} & \text{(la quantité } \rho \text{ est le module de } u\text{, elle doit donc être } \geq 0) \\ \text{et} \quad \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi & (\ k \in \mathbb{Z}\ ). \end{cases}$$

On a donc

$$u = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)} \qquad (\ k \in \mathbb{Z}\ ).$$

En faisant varier k dans $\mathbb{Z}$, on obtient les différentes racines carrées u_k de z, à savoir

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \quad = \quad \sqrt{r}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})\right)$$

$$\begin{aligned} k = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} &= \sqrt{r}\left[\underbrace{\cos\left(\tfrac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\cos(\frac{\theta}{2})} + i\underbrace{\sin\left(\tfrac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\sin(\frac{\theta}{2})}\right] \\ &= -\sqrt{r}\left[\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})\right] \\ &= -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+2\pi\right)} &= \sqrt{r}\left[\underbrace{\cos\left(\tfrac{\theta}{2}+2\pi\right)}_{\cos(\frac{\theta}{2})} + i\underbrace{\sin\left(\tfrac{\theta}{2}+2\pi\right)}_{\sin(\frac{\theta}{2})}\right] \\ &= r\left[\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})\right] \\ &= \sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+3\pi\right)} &= \sqrt{r}\left[\underbrace{\cos\left(\tfrac{\theta}{2}+3\pi\right)}_{-\cos(\frac{\theta}{2})} + i\underbrace{\sin\left(\tfrac{\theta}{2}+3\pi\right)}_{-\sin(\frac{\theta}{2})}\right] \\ &= -\sqrt{r}\left[\cos(\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(\tfrac{\theta}{2})\right] \\ &= -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -u_0. \end{aligned}$$

On remarque que les valeurs successives $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ conduisent à deux nombres complexes distincts :

$$\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Le lecteur peut vérifier qu'il en va de même pour les valeurs négatives de k, à savoir $k = -1, -2, -3, \cdots$.

En conclusion,

> Le nombre complexe $z = r\ e^{i\theta}$ $(r \geq 0)$ possède deux racines carrées, à savoir
>
> $$\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

La représentation géométrique des deux racines carrées d'un nombre complexe z est donnée à la FIGURE 1.26.

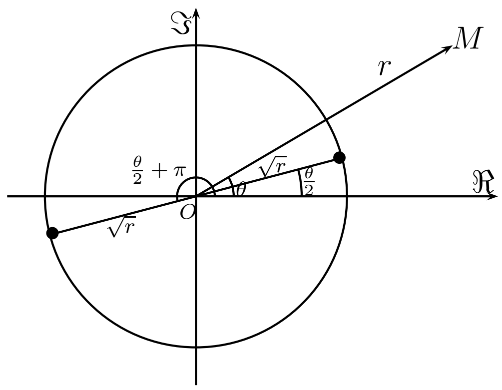


Figure 1.26: Représentation des racines carrées d'un nombre complexe z dont le point M est l'image de z

Le calcul des *racines carrées* d'un nombre complexe peut également se faire à l'aide de la forme algébrique, qui s'y prête tout aussi bien.

Écrivons le nombre complexe z sous la forme algébrique :

$$z = a + ib$$

et calculons ses racines carrées.

On cherche donc $u = x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = a + bi$

$$\text{i.e.} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib,$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 & = & a, & (1) \\ 2xy & = & b. & (2) \end{cases}$$

La solution de ce système se trouve en élevant au carré les deux équations et en les additionnant :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2) &= \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & \text{par } (1) + (3) \\ y^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & \text{par } -(1) + (3) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} \quad x = -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\,, \\ y = \sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} \quad y = -\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\,, \end{cases}$$

où les signes de x et y seront déterminés par (2) :

$$\text{si } b \geq 0 : \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \qquad (\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe})$$

$$\text{si } b < 0 : \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad (\ x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé})$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées de $z = 1+i\sqrt{3}$ et écrire celles-ci sous les trois formes exponentielle, trigonométrique et algébrique. De plus, représenter géométriquement les racines carrées.

Pour calculer ses racines carrées, on va tout d'abord écrire z sous la forme exponentielle.

- $|z| = \sqrt{4} = 2$
- $\arg(z) = \theta$ donné par $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On a donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Le nombre $z = 1 + i\sqrt{3}$ s'écrit donc $z = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ses racines carrées sont donc

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\ \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ u_1 &= \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\ \left(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})\right) = -\sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

La représentation géométrique est donnée à la FIGURE 1.27.

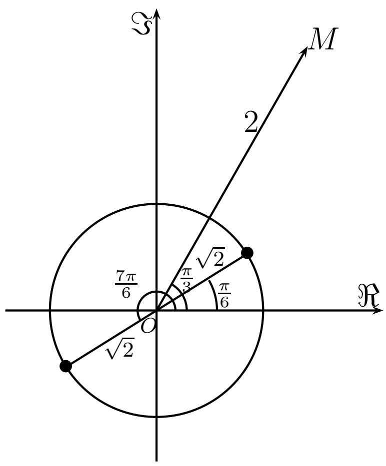


Figure 1.27: Représentation des racines carrées du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ dont son image est le point M

Exercice 2 :

$\boxed{\text{Calculer les racines carrées de } z = -1 \text{ et les représenter.}}$

On a $z = e^{i\pi}$. Ses racines carrées sont donc $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$. Les deux racines carrées de -1 sont $+i$ et $-i$.

La représentation géométrique est donnée à la FIGURE 1.28.

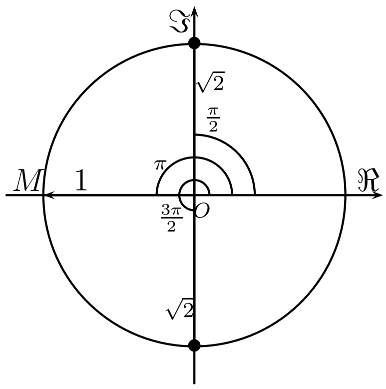


Figure 1.28: Représentation des racines carrées d'un nombre complexe $z = -1$ dont son image est le point M

1.9 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0)$

On a montré, au §1.1, que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0)$ est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\ .$$

Le cas $b^2 - 4ac \geq 0$ a été traité au §1.1. On s'intéresse donc au cas $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$.

L'équation peut s'écrire

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}_{\text{nombre réel } > 0}\ .$$

$$\text{ou encore} \quad \left[\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\right]^2 = -1 = i^2.$$

La quantité entre les crochets, que nous notons z, est une racine carrée de -1, c'est-à-dire vaut i ou $-i$.

> En effet, soit la quantité z entre les crochets peut être écrite généralement comme $z = a + ib$.
>
> Alors, comme $z^2 = i^2 = -1$, on a que
>
> $$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1; \\ 2ab = 0; \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$
>
> En résolvant ce système, nous obtenons que : $a = 0$ et $b = \pm 1$.
>
> Ainsi, la quantité z entre les crochets vaut $z = a + ib = \pm i$.

On obtient finalement :

Les racines de l'équation à coefficients réels $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sont données par

- si $b^2 - 4ac = 0$: $x = \frac{-b}{2a}$;
- si $b^2 - 4ac > 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
- si $b^2 - 4ac < 0$: $x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

On obtient dans ce cas deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

Exemple : calculer les solutions de $3x^2 - 7x + 10 = 0$.
La quantité $b^2 - 4ac = -71 < 0$.

Les racines sont $\frac{7+i\sqrt{71}}{6}$ et $\frac{7-i\sqrt{71}}{6}$. Elles sont conjuguées entre elles. En effet, pour rappel, si $z = a + ib$, le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$. Ici, on a que $a = \frac{7}{6}$ et $b = \frac{\sqrt{71}}{6}$.

1.10 Exercices

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

   (a) $z = 2 - 10i$; (c) $z = \overline{2 - 4i}$;

   (b) $z = 8 + 9i$; (d) z tel que $\overline{z} = 2 + i$.

2. Déterminer les nombres réels x et y satisfaisant à :

   (a) $x + iy = 5 - 8i$; (c) $x + iy = \overline{9 - i}$;

   (b) $\overline{x + iy} = 2 - i$; (d) $x + iy = 2 + 10i$.

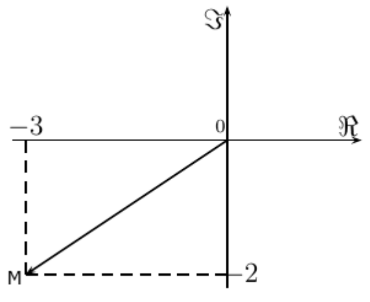
3. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme trigonométrique :

   (a) $1 - i$; (d) $-2 + 0 \cdot i$; (g) $0 + 5i$;

   (b) $-1 - i$; (e) $-1 - i\sqrt{3}$; (h) $4 - 4i$;

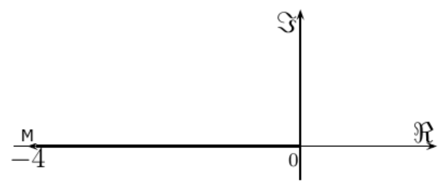
   (c) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; (f) $-\sqrt{3} + 3i$; (i) $2 + 2i$.

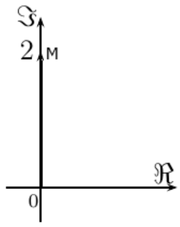
4. À partir de la représentation géométrique, écrire la forme trigonométrique du nombre complexe représenté :

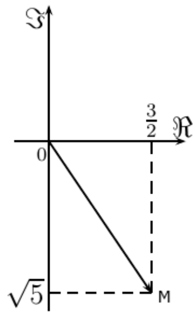


(a)

(c)



(b) 

(d) 

5. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme algébrique :

   (a) $\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})$;

   (b) $2\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right)$;

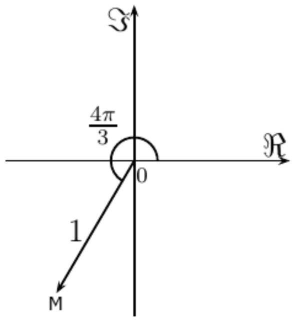
   (c) $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$;

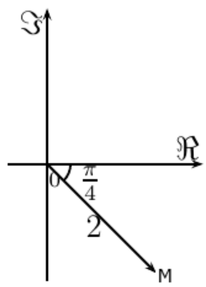
   (d) $3\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$;

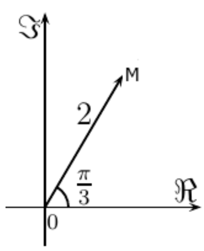
   (e) $2\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$;

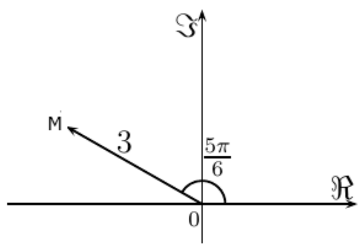
   (f) $2\left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right)$.

6. À partir de la représentation géométrique, écrire la forme algébrique du nombre complexe représenté :

(a) 

(c) 

(b) 

(d) 

7. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Effectuer les opérations suivantes :

(a) $-2i\ (2+i)$;

(b) $(2+3i)\ (3+2i)$;

(c) $(-7+i)\ (7+i)$;

(d) $(\sqrt{3}-i\sqrt{5})\ (\sqrt{3}+i\sqrt{5})$;

(e) $(-2+7i)\ (-2-7i)$;

(f) $(x-a+bi)\ (x-a-bi)$;

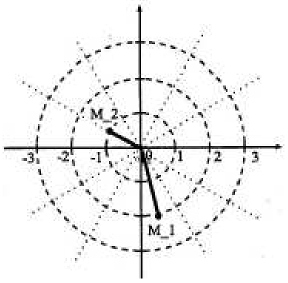
(g) $\dfrac{9-i}{i}$;

(h) $\dfrac{3}{6-5i}$;

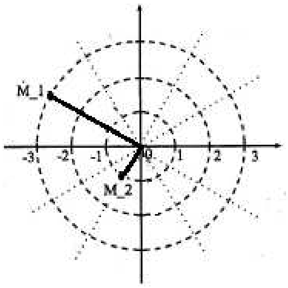
(i) $\dfrac{a+bi}{b-ai}$;

(j) $\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{a-bi}{a+bi}$.

8. Soit M_1 et M_2 sont les images des nombres complexes z_1 et z_2, représenter géométriquement l'image de z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.



(a)



(b)

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuer les opérations suivantes :

(a) $\dfrac{(2+i)(5-i)(2-i)}{3+2i}$;

(b) $\dfrac{(4+i)\overline{(5-i)}}{(3+i)(-1+i)}$;

(c) $\dfrac{(x-i)(3+2i)}{i(x+i)}$;

(d) $\overline{\left[\dfrac{(2-3i)(5+2i)}{(3-2i)(4+i)}\right]}$.

10. Déterminer le module des nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{(1-i)\overline{(2+i)}}{4-i}$;

(b) $\dfrac{1-2i}{i}$;

(c) $\dfrac{1+5i}{3+i} - \dfrac{2-i}{i}$;

(d) $(3+i)\left[(5-2i) + \dfrac{i}{i+1}\right]$.

11. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(1+i)^5$;

(b) $(1-2i)^2\overline{(1+i)}$;

(c) $\dfrac{(5+i)(3-i)}{1-i}$;

(d) $\dfrac{(1-3i)^3}{(2+i)^2}$;

(e) $\dfrac{1+3i}{\overline{(1-i)}} + \dfrac{1+i}{(1-i)^2}$.

12. Écrire chacun des nombres complexes de l'exercice 3 sous la forme exponentielle.

13. Utiliser la forme exponentielle pour évaluer :

(a) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$, (b) $\dfrac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$, (c) $(1-i)^3$.

14. Que deviennent le module et l'argument d'un nombre complexe z lorsqu'on multiplie ce dernier par :

(a) $-i$, (b) $3i$, (c) $\sqrt{3}+i$, (d) $-1+i$.

15. Écrire sous la forme algébrique :

(a) $\left[2\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)\right]^5$;

(b) $\left[3\left(\sin(\frac{3\pi}{4}) + i\cos(\frac{3\pi}{4})\right)\right]^3$;

(c) $\left(-3\, e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$;

(d) $\left(2\, e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^3$.

16. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(-i)^2$; (d) $(1+i)^3$;

(b) $(-i)^3$; (e) $(1+i\sqrt{3})^4$;

(c) $(2i)^2$; (f) $(-1+2i)^3$.

17. Déterminer et représenter les racines carrées de :

(a) $2i$, (b) $-4i$, (c) $1-i\sqrt{3}$.

18. Calculer et représenter les racines des équations suivantes :

(a) $x^2-2x+2=0$; (d) $x^4+6x^2+25=0$;

(b) $x^2+x+1=0$; (e) $x^4+10x^2+169=0$;

(c) $x^4-8x^2-9=0$; (f) $16x^2+24x+5=0$.

19. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(z+1)^{2n+2}=1$$

où n est un entier >0.

20. Calculer et représenter toutes les valeurs de

(a) $(1+i\sqrt{3})^{1/5}$;

(b) $(-1-i\sqrt{3})^{-1/3}$;

(c) $(1-i)^{-1/3}$;

(d) $(-\sqrt{3}-i)^{-5}$.

21. Soit $\dfrac{x-iy}{x+iy}=a+ib$.

Calculer a^2+b^2.

22. Résoudre les équations suivantes : $z^3=8$; $z^4=1-i$; $z^3=5-3i$.

23. Déterminer $(1-i\sqrt{3})^{10}$, $(2+i)^3$; $(3-4i)^5$; $(2+2i)^4$.

24. Déterminer
   - $(-16)^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire résoudre $z^4=-16$;
   - $(100)^{\frac{1}{10}}$, c'est-à-dire résoudre $z^{10}=100$.

25. Soit $z\in\mathbb{C}$; Prouver que
   (a) $\Re\,(iz)=-\,\Im\,(z)$;
   (b) $\Im\,(iz)=\Re\,(z)$;
   (c) $\Re\,(z^2)=(\Re\,(z))^2-(\Im\,(z))^2$;
   (d) $\Im\,(z^2)=2(\Re\,(z))(\Im\,(z))$.

26. Les affirmations suivantes sont-elles vraies pour tout $z_1,z_2\in\mathbb{C}$:
   (a) $\Re\,(z_1+z_2)=\Re\,(z_1)+\Re\,(z_2)$;
   (b) $\Re\,(z_1z_2)=(\Re\,(z_1))(\Re\,(z_2))$;
   (c) $\Re\,(\alpha z_1)=\alpha\,\Re\,(z_1)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$;
   (d) $\Im\,(z_1-z_2)=-\,\Im\,(z_2-z_1)$;
   (e) $\Im\,[(z_1+z_2)^2]=-\,\Im\,[(z_1-z_2)^2]$.

27. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $i^{n+4}=i^n$.
   Utiliser ce résultat pour évaluer i^{12735} et $(1+i)^{3074}$.
   Note : calculer d'abord $(1+i)^2$.

28. Résoudre les équations suivantes en x et y où $x,y\in\mathbb{R}$.
   (a) $i(x+iy)=x+1+2iy$;
   (b) $x^2-y^2+i2xy=-ix+y$;
   (c) $(x+iy)^2=i$;
   (d) $\sqrt{x^2+y^2}=1-2x+iy$;
   (e) $\sin(e^x)+i\cos(x)=1+i\sin(y)$.

1.11 Solutions des exercices

1. (a) $\Re(z) = 2, \quad \Im(z) = -10\,;$

   (b) $\Re(z) = 8, \quad \Im(z) = 9\,;$

   (c) $\Re(z) = 2, \quad \Im(z) = 4\,;$

   (d) $\Re(z) = 2, \quad \Im(z) = -1.$

2. (a) $x = 5, \quad y = -8\,;$

   (b) $x = 2, \quad y = 1\,;$

   (c) $x = 9, \quad y = 1\,;$

   (d) $x = 2, \quad y = 10.$

3. (a) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right)\,;$

   (b) $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right)\,;$

   (c) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right)\,;$

   (d) $-2 + i\ 0 = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)\,;$

   (e) $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})\right)\,;$

   (f) $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)\,;$

   (g) $0 + 5i = 5\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right)\,;$

   (h) $4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right)\,;$

   (i) $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right).$

5. (a) $\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\,;$

(b) $2\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = 2i\,;$

(c) $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$

(d) $3\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;$

(e) $2\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,;$

(f) $2\left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) = -2.$

7. (a) $-2i\ (2+i) = 2 - 4i\,;$

(b) $(2+3i)\ (3+2i) = 13i\,;$

(c) $(-7+i)\ (7+i) = -50\,;$

(d) $(\sqrt{3} - i\sqrt{5})\ (\sqrt{3} + i\sqrt{5}) = 8\,;$

(e) $(-2+7i)\ (-2-7i) = 53\,;$

(f) $(x-a+bi)\ (x-a-bi)$
$= (x-a)^2 + b^2\,;$

(g) $\frac{9-i}{i} = -1 - 9i\,;$

(h) $\frac{3}{6-5i} = \frac{18}{61} + \frac{15}{61}\ i\,;$

(i) $\frac{a+bi}{b-ai} = i\,;$

(j) $\frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi}$
$= 2\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$

9. (a) $\frac{(2+i)(5-i)(2-i)}{3+2i} = 5(1-i)\,;$

(b) $\frac{(4+i)\overline{(5-i)}}{(3+i)(-1+i)} = -\frac{29}{10} - \frac{37}{10}\ i\,;$

(c) $\frac{(x-i)(3+2i)}{i(x+i)} = \frac{1}{1+x^2}\ \left[-2(-x^2+3x+1) + i(-3x^2-4x+3)\right]\,;$

(d) $\overline{\left[\frac{(2-3i)(5+2i)}{(3-2i)(4+i)}\right]} = \frac{279}{221} + i\ \frac{74}{221}.$

10. (a) $\left|\dfrac{(1-i)\overline{(2+i)}}{4-i}\right| = \sqrt{\dfrac{10}{17}}\,;$ (c) $\left|\dfrac{1+5i}{3+i} - \dfrac{2-i}{i}\right| = \sqrt{\dfrac{74}{5}}\,;$

(b) $\left|\dfrac{1-2i}{i}\right| = \sqrt{5}\,;$ (d) $\left|(3+i)\left[(5-2i) + \dfrac{i}{i+1}\right]\right| = 5\sqrt{13}.$

11. (a) $(1+i)^5 = -4-4i\,;$

(b) $(1-2i)^2\overline{(1+i)} = -7-i\,;$

(c) $\dfrac{(5+i)(3-i)}{1-i} = 9+7i\,;$

(d) $\dfrac{(1-3i)^3}{(2+i)^2} = \dfrac{2}{25}\,(-3+79i)\,;$

(e) $\dfrac{1+3i}{\overline{(1-i)}} + \dfrac{1+i}{(1-i)^2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i.$

13. (a) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = 2^3(\sqrt{3}+i)\,;$

(b) $\dfrac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,e^{-i\,\frac{7\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,e^{i\,\frac{17\pi}{12}}\,;$

(c) $(1-i)^3 = -2(1+i).$

14. (a) $\arg\,(-iz) = \arg\,(z) + \frac{3\pi}{2}$, $|-iz| = |z|$,

(b) $\arg\,(3iz) = \arg\,(z) + \frac{\pi}{2}$, $|3iz| = 3|z|$,

(c) $\arg\,[(\sqrt{3}+i)z] = \arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$, $|(\sqrt{3}+i)z| = 2|z|$,

(d) $\arg\,[(-1+i)z] = \arg\,(z) + \frac{3\pi}{4}$, $|(-1+i)z| = \sqrt{2}|z|$.

15. (a) $\left[2\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)\right]^5 = -16\sqrt{2}(1+i)\,;$

(b) $\left[3\left(\sin(\frac{3\pi}{4}) + i\cos(\frac{3\pi}{4})\right)\right]^3 = \frac{27}{4}\,\sqrt{2}(1-i)\,;$

(c) $\left(-3\ e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -\frac{9}{2} + i\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\,;$

(d) $\left(2\ e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = 8i.$

17. (a) $1+i$ et $-1-i\,;$

(b) $\sqrt{2}(-1+i)$ et $\sqrt{2}(1-i)\,;$

(c) $-\sqrt{\frac{3}{2}} + i\ \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} - i\ \sqrt{\frac{1}{2}}.$

18. (a) $1+i$ et $1-i\,;$

(b) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;$

(c) $3,\quad -3,\quad i$ et $-i.$

21.
$$\begin{aligned}
\frac{x-iy}{x+iy} &= \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\ \frac{-2xy}{x^2+y^2} \;=:\; a+ib \\
a^2+b^2 &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ \left[(x^2-y^2)^2 + (-2xy)^2\right] \\
&= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ \underbrace{\left[x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2\right]}_{\substack{=x^4+y^4+2x^2y^2 \\ =(x^2+y^2)^2}} \quad = \quad 1\,.
\end{aligned}$$

En effet : Soit $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$.

- $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + i(ad+bc) \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - i(ad+bc)$
- $\overline{z_1} = a-ib$ et $\overline{z_2} = c-id \Rightarrow \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = ac - ibc - ida - bd = (ac-bd) - i(ad+bc)$

Conclusion

Au travers de ce mémoire, nous avons mis en lumière les difficultés liées aux changements de cadres et de registres chez les étudiants lorsqu'ils résolvent un exercice proposé dans un cadre géométrique. Entre autres, nous avons constaté que ce n'est pas d'effectuer ces changements qui posent le plus de problèmes mais c'est de choisir le cadre et le registre le plus adéquat pour solutionner l'exercice. Pour ce faire, nous avons suivi le cheminement de la transposition didactique de Chevallard (en y ajoutant le savoir appris) en analysant les différents savoirs qui la composent.

Afin d'analyser le savoir savant, nous avons réalisé une analyse à caractère épistémologique de l'acceptation des nombres complexes et de l'apparition de leurs représentations géométriques dans le savoir savant. Nous avons constaté que l'acceptation et l'utilisation des nombres complexes comme « objet » (au sens de Douady) n'a pu être possible que lorsqu'une représentation géométrique de ces nombres est apparue. Nous en déduisons donc qu'il est important de faire référence autant au cadre géométrique qu'au cadre numérique lorsqu'on enseigne les nombres complexes pour une plus grande compréhension des élèves. Ainsi, comme Douady le préconise, l'utilisation de nombreux changements de cadres et de registres, par l'enseignant, est recommandé lors d'explications théoriques.

Par la suite, en utilisant divers cadres théoriques (les *cadres* de Douady [3], les *registres* de Duval [4] et l'*organisation mathématique* de Chevallard [2] et [10]), nous avons accompli une analyse du savoir à enseigner et du savoir enseigné à un public d'étudiants de premier bachelier en science de la vie (biologie, géologie et géographie). Notons que dans notre cas, il n'existe pas de distinction entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné par l'absence de programmes scolaires à l'université. Pour cette analyse, nous nous sommes basés sur les diapositives utilisées lors du cours donné à ces étudiants de l'année académique 2012-2013 à l'université de Namur. Nous avons constaté, entre autres, l'utilisation de différents cadres et registres lors des explications fournies aux étudiants comme Douady le recommande afin de faciliter la compréhension des élèves. Mais, il y avait, également, un manque de représentations géométriques pour certaines notions, comme pour la présentation de l'addition de deux nombres complexes de façon théorique.

Après un aperçu de l'enseignement fourni aux étudiants, nous avons examiné le savoir appris ainsi que les erreurs les plus souvent commises à travers l'analyse de deux tâches posées dans un cadre géométrique, provenant de l'examen proposé aux étudiants concernés en juin 2013. Cette analyse nous a permis de poser les constats suivants : les étudiants n'ont pas un usage raisonné des changements de cadres et de registres lors de la résolution de tâches proposées dans un cadre géométrique. En effet, une des difficultés qu'ils rencontrent est d'effectuer le choix du cadre et du registre le plus adapté à l'exercice demandé. Nous pensons donc que lors de l'enseignement des nombres complexes, le professeur est amené à travailler avec les étudiants ces choix (de cadre et de registre) les plus adéquats à une tâche proposée. Ensuite, il s'avère que la moitié des étudiants n'utilise pas des praxéologies complètes (au sens de Chevallard) puisqu'ils ne laissent une trace écrite que du bloc pratico-technique (composé d'un type de tâches et de la technique). Notons que la maîtrise de la trigonométrie et de la géométrie vectorielle constitue un pré-requis pour l'apprentissage des nombres complexes lors de changements de cadres et de registres. Notons aussi que les erreurs les plus souvent commises sont l'approximation des parties réelles et imaginaires intervenant dans la forme algébrique de ces nombres ainsi que des erreurs dans la manipulation des nombres.

Dans l'objectif de concrétiser les résultats obtenus, nous proposons une mise à jour du chapitre concernant ces nombres dans le syllabus des cours préparatoires en mathématiques destinés aux étudiants en mathématiques et en physique. Les principales modifications apportées sont :

1. la correction de l'inexactitude de certaines informations et leur précision concernant l'histoire des nombres complexes ;

2. l'apport de nombreuses représentations géométriques, peu présentes auparavant. Notamment, nous avons ajouté une section propre à l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes ;

3. un complément d'exercices s'appuyant sur le cadre géométrique ainsi qu'un complément de remarques ;

4. la modification de la structure du chapitre de telle sorte que les représentations géométriques, la définition d'un nombre complexe et celle des trois formes d'un nombre complexe soient mises en évidence. De plus, nous avons fait en sorte que toutes les notions nécessaires pour réaliser des changements de cadres et de registres soient définies le plus tôt possible. Dans ce sens,

nous avons déplacé la section abordant la forme exponentielle pour qu'elle apparaissent avant celle qui traite des opérations sur les nombres complexes.

Dans l'objectif d'améliorer encore plus la compréhension des nombres complexes par les étudiants, les perspectives de ce travail consistent :

- en la réalisation d'une analyse plus approfondie des différents cadres et registres intervenant dans l'énoncé et la résolution des tâches, afin de percevoir leur complexité et, au besoin, d'adapter l'enseignement proposé ;
- à se pencher sur d'autres types de questions faisant intervenir les nombres complexes et/ou qui ne sont pas forcément posées dans un cadre géométrique. Par exemple, la recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et leur représentation ainsi que des questions du type : $e^{-i\theta}$ est-il égal à $-e^{i\theta}$? Notons qu'il est probable que certains élèves recourent à un « théorème en acte » disant $e^{-i\theta} = -e^{i\theta}$. Une manière envisageable pour remédier à une telle erreur serait l'utilisation de représentations géométriques.

Bibliographie

Livres

[1] Alvesdias M., *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, université de Paris, 1998

[2] Chevallard Y., *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, Acte du premier congrès de la théorie anthropologique du didactique (Baeza), Universidad de Jaén, pp. 705-746

[3] Douady R., *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, Repères-IREM, n° 6,1992

[4] Duval R., *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, IREM de Strasbourg, 1993

[5] Flament D., *Histoire des nombres complexes*, cnrs éditions, Paris, 2003

[6] Wessel C., *Essai sur la représentation analytique de la direction*,Copenhague et Paris, 1897

Revues

[7] Abihssira-Lavandier A., Alvez Y., Beauvoit E., Guillemet D., Le Yaouanq M., Royer F. & Tadeusz L.,*TS enseignement spécifique*, Math'x, 2012, p. 280

[8] Hilda Rosseel & Maggy Schneider, Les nombres complexes comme modèles albégriques de similitudes directes : avec ou sans matrices ?, *Losanges*, 24, 2014, pp. 30-37

Documents électroniques

[9] Bijaoui A., Les nombres imaginaires, http://www.lirmm.fr/~terrat/ENS/EDI/TER2007/15%20-%20Les%20Nombres%20Imaginaires%20-%20BIJAOUI%20Arnaud.pdf, 2007, consulté le 1 mars 2014

[10] Chevallard Y, *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique*, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf, consulté le 25 mars 2014

[11] Colette J.-P., *Histoire des nombres complexes : aperçu historique et quelques considérations pédagogiques*, archimede.mat.ulaval.ca/amq/archives/1977/1/1977-1-part2.pdf, consulté le 5 mars 2014

[12] Hausberge T., *L'équation du troisième degré : une histoire complexe*, http://www.irem.univ-montp2.fr/IMG/pdf/ressource_IREM-nombres_complexes.pdf, 2011, consulté le 19 février 2014

[13] A.Chaouachi, *Emergents spontanés d'une analyse praxéologique*, http://www.memoireonline.com/04/10/3364/m_Emergents-spontanes-dune-analyse-praxeologique6.html, 2009, consulté le 27 mai 20015

Annexe 2

Dans cette annexe, nous pouvons prendre connaissance du chapitre sur les nombres complexes du syllabus des cours préparatoires en mathématiques à destination des étudiants de mathématiques et de physique avant toute modification.

Nous présentons, tout d'abord, le plan général de ce syllabus.

- Chapitre 1 : logique et raisonnement
- Chapitre 2 : les ensembles : notions de base
- Chapitre 3 : rudiments de calcul matriciel et résolution de systèmes d'équations linéaires
- Chapitre 4 : étude de fonctions
- Chapitre 5 : les séries de Taylor et de Mac Laurin
- Chapitre 6 : les nombres complexes
- Chapitre 7 : géométrie analytique plane
- Chapitre 8 : trigonométrie

Chapitre 6

Les nombres complexes

Sommaire

1. Introduction

Chaque type de nombre permet de résoudre un type particulier d'équation et historiquement, les nombres complexes sont apparus dans le cadre de la résolution des équations du second degré à coefficients réels.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ est utilisé dans la numération. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ est constitué par les nombres solutions d'équations du type $z + b = a$, où a et b sont des entiers naturels ; l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, d'équations du type $bz - a = 0$, où a et b sont des entiers naturels, et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ d'équations du type $x^2 - 2 = 0$ par exemple (dont les solutions sont des nombres irrationnels). L'ensemble des nombres complexes désigné par $\mathbb{C}$ permet, lui, de résoudre une équation telle que, par exemple, $x^2 + 1 = 0$, et nous verrons plus loin (§2) que la relation suivante est correcte :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \underbrace{\subset \mathbb{C}} \ .$$

Considérons maintenant l'équation plus générale du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0 \ .$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme équivalente

$$a \left[x^2 + \frac{b}{a} \, x + \frac{c}{a} \right] = 0$$

ou encore, en divisant par $a \neq 0$:

$$x^2 + 2 \, \frac{b}{2a} \, x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

c'est-à-dire

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ . \tag{6.1}$$

$\boxed{\text{Si } b^2 - 4ac \geq 0}$, l'équation (4.1) admet deux solutions données par

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

où $\sqrt{b^2-4ac}$ désigne la racine carrée positive du nombre positif b^2-4ac .

$\boxed{\text{Si } b^2-4ac<0}$, l'équation (4.1) n'admet aucune solution dans $I\!R$. On a en effet :

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}_{<0} .$$

On voit que, pour déterminer x , il faudrait pouvoir calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

L'Italien Bombelli (vers 1560) eut l'idée d'envisager un nombre imaginaire dont le carré serait -1 . Nous le noterons i . On a donc

$$\boxed{i^2=-1}$$

Nous poursuivrons la résolution de l'équation (4.1) au §7. Auparavant, nous donnerons une définition générale d'un nombre complexe.

2. Définitions

Définition 6.1

On appelle **nombre complexe** toute expression de la forme $z=a+ib(=a+bi)$ dans laquelle a et b sont des nombres réels et i est le nombre imaginaire vérifiant $i^2=-1$. C'est une convention.

a est appelé « **partie réelle** » et b est appelé « **partie imaginaire** » du nombre complexe $z=a+bi$.
On notera $a=\Re\mathrm{e}\,(z)$, $b=\ \mathrm{Im}(z)$.

Par exemple, pour le nombre complexe $z=5+8i$, on a $\Re\mathrm{e}\,(z)=5$ et $\mathrm{Im}(z)=8$.

Le nombre complexe $2+(-3)i$, dont la partie imaginaire vaut -3 , s'écrira aussi $2-3i$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est identifié à l'ensemble des couples de nombres réels $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b)\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\}$.

Le résultat suivant est dès lors immédiat.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$a+ib=c+id \qquad \text{si et seulement si} \quad a=c \text{ et } b=d\ .$$

- On a, par exemple, $2-9i = \frac{4}{2} + \left(-\frac{27}{3}\right) i$.

- On aura $x+iy = 7-6i$ si et seulement si $x=7$ et $y=-6$.

- En particulier, $a+ib=0=0+0\cdot i \;\Leftrightarrow\; a=b=0$

  et $a+ib \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a\neq 0$ ou $b\neq 0 \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2\neq 0$.

Définition 6.2

Le nombre complexe **conjugué** du nombre complexe $z=a+ib$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par

$$\overline{z} = a-ib\ .$$

Pour déterminer le conjugué d'un nombre complexe, il suffit donc de changer de signe sa partie imaginaire. Par exemple, si $z=3+2i$, on a $\overline{z}=3-2i$.

Remarquons que le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est le nombre complexe lui-même, c'est-à-dire

$$\overline{\overline{z}} = z\ .$$

Si

$$z = a+ib\ ,$$

on a en effet,

$$\overline{z} = a + i(-b)$$

et

$$\overline{\overline{z}} = a + i[-(-b)] = a + ib \ .$$

Remarque : **tout nombre réel peut être considéré comme un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle**. Le nombre $a \in \mathbb{R}$ peut en effet s'écrire $a + ib$ avec $b = 0$. L'ensemble $\mathbb{C}$ est donc une extension de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Et on pourra identifier l'axe des abscisses dans $\mathbb{C}$, à l'ensemble $\mathbb{R}$ (cfr. Figure 6.1). D'autre part, les nombres complexes $a + bi$ tels que $a = 0$ seront appelés les « nombres purement imaginaires ». Ils seront donc du type « bi ».

3. Représentation géométrique et forme trigonométrique des nombres complexes

3.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Bien que l'on ait utilisé les nombres complexes depuis le milieu du XVIème siècle, ce n'est pas avant la fin du XVIIIème siècle que l'on a eu l'idée d'en chercher une « représentation géométrique ». Celle-ci consiste à associer à chaque nombre complexe $a+ib$ le point M du plan (rapporté à un système d'axes rectangulaires) dont les coordonnées sont (a, b) (voir Figure 6.1). Le point M est appelé **image** du nombre complexe $a+ib$ et celui-ci est appelé **affixe** du point M . L'axe horizontal est appelé l'**axe réel** et noté $\Re\mathrm{e}$; l'axe vertical est appelé **axe imaginaire** et noté Im .

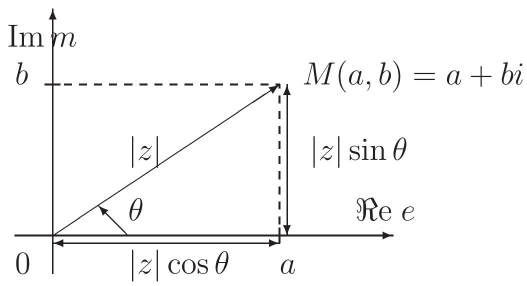


Figure 6.1. M = image du nombre complexe $z = a + ib$.

Tout nombre complexe $z = a + bi$ correspond donc à un couple (a, b) de $I\!R \times I\!R$ et on pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre notation.
En particulier,

- on identifie les nombres réels avec les points de l'axe des abscisses, soit $a \equiv (a, 0)$;
- on identifie les nombres complexes imaginaires purs avec les points de l'axe des ordonnées, soit $bi \equiv (0, b)$.

Ceci signifie donc qu'on définit i par $\boxed{i \equiv (0,1)}$. **C'est une notation !**

3.2 Module d'un nombre complexe

La représentation géométrique de la Figure 6.1 permet d'introduire le **module du nombre complexe** $z = a + ib$: **c'est la norme du vecteur** $\overrightarrow{OM}$. On la note $|z|$. Le Théorème de Pythagore montre que $|z|^2 = a^2 + b^2$. On a donc :

Définition 6.3

Le module du nombre complexe $a + ib$ est la racine carrée positive de $a^2 + b^2$, c'est-à-dire

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Exemples :

- $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

- $|2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$

Les nombres complexes $3+2i$ et $2-5i$ sont représentés à la Figure 6.2.

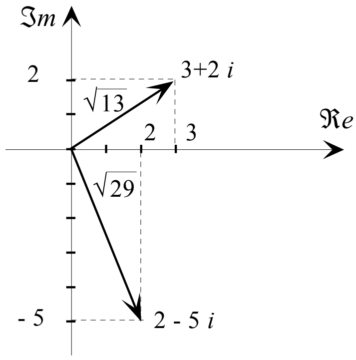


Figure 6.2. Représentation géométrique des nombres complexes $3+2i$ et $2-5i$.

3.3 Argument d'un nombre complexe

La Figure 6.1 permet également d'introduire l'angle θ entre l'axe réel et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, mesuré positivement dans le sens antihorlogique. On l'appelle l'**argument** du nombre complexe $z = a + ib$. On le note $\arg(z)$. On remarque que

$$a = |z| \cos\theta \qquad \text{et} \qquad b = |z| \sin\theta \ .$$

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut donc s'écrire sous la **forme trigonométrique** (en coordonnées polaires)

$$z = |z| \ (\cos\theta + i \sin\theta) \ .$$

Inversement, si un nombre complexe est donné sous la forme $z = r \ (\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in I\!R$, on peut l'écrire sous la forme $z = a + ib$, appelée **forme algébrique** comme indiqué dans la synthèse suivante.

Forme algébrique $\rightarrow$ forme trigonométrique

$$z = a + ib \quad \rightarrow \quad z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{a^2+b^2}\ , \\ \cos\theta & = & \frac{a}{r}\ , \quad \text{si } r \neq 0\ , \\ \sin\theta & = & \frac{b}{r}\ , \quad \text{si } r \neq 0\ . \end{array} \right.$$

Forme trigonométrique $\rightarrow$ forme algébrique

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \rightarrow \quad z = a + ib$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & r\cos\theta\ , \\ b & = & r\sin\theta\ . \end{array} \right.$$

Remarque : **l'argument d'un nombre complexe est défini à 2π près**. On a en effet :

$$\left. \begin{array}{lcl} \cos\theta & = & \cos(\theta + 2k\pi) \\ \sin\theta & = & \sin(\theta + 2k\pi) \end{array} \right\} \quad \text{pour tout } \ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Cela signifie que l'on peut ajouter ou retrancher à l'argument d'un nombre complexe, un nombre entier de fois 2π , sans changer ce nombre. On a par exemple

- $$\begin{aligned} \cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4} &= \cos\left(\tfrac{3\pi}{4} - 2\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4} - 2\pi\right) \\ &= \cos\left(-\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{5\pi}{4}\right) \\ &= \cos\tfrac{5\pi}{4} - i\sin\tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + 4\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{6} + 4\pi\right) \\ &= \cos\tfrac{25\pi}{6} + i\sin\tfrac{25\pi}{6} \end{aligned}$$

Sauf mention explicite du contraire, nous travaillerons avec des arguments θ satisfaisant à $0 \leq \theta < 2\pi$.

3.4 Exemples

(Ex.1) Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme trigonométrique.

(a) $\boxed{z_1 = 2 + 2i}$

- Le module de $z_1 = |z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

- L'argument de z_1 , noté θ_1 , est obtenu par

$$\cos\theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$
$$\sin\theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

  ce qui donne $\theta_1 = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ radian.

- La forme trigonométrique de z_1 est donc $z_1 = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

- Sa représentation géométrique est donnée à la Figure 6.3.

(b) $\boxed{z_2 = -\sqrt{3} + 3i}$

- Le module de $z_2 = |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

- L'argument de z_2 , noté θ_2 , est obtenu par

$$\cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} ,$$
$$\sin\theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

  ce qui donne $\theta_2 = 120^0 = \frac{2\pi}{3}$ radians.

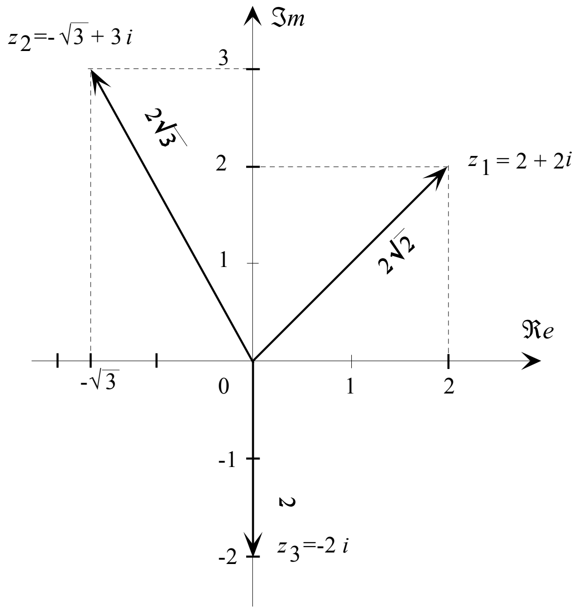


Figure 6.3. Représentation géométrique de $\begin{aligned} z_1 &= 2+2i \ , \\ z_2 &= -\sqrt{3}+3i \ , \\ z_3 &= -2i \ . \end{aligned}$

- La forme trigonométrique de z_2 est donnée par

$$z_2 = 2\sqrt{3}\ \left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \ ,$$

  et sa représentation géométrique est donnée à la Figure 6.3.

(c) $\boxed{z_3 = -2i}$

On a $z_3 = 0 - 2i$.

- Le module de $z_3 = |z_3| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$.

- L'argument de z_3 , noté θ_3 , est donné par

$$\cos\theta_3 = 0 \ , \qquad \sin\theta_3 = -\frac{2}{2} = -1 \ ,$$

  ce qui donne $\theta_3 = 270^0 = \frac{3\pi}{2}$ radians.

- La forme trigonométrique de z_3 est donnée par

$$z_3 = 2\ \left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) \ ,$$

  et sa représentation géométrique est donnée à la Figure 6.3.

(Ex.2) Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme algébrique.

(a) $$z_4 = \sqrt{2}\ \Big(\underbrace{\cos\tfrac{3\pi}{4}}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\,\underbrace{\sin\tfrac{3\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big) = -1 + i\ .$$

(b) $$z_5 = \underbrace{\cos\tfrac{4\pi}{3}}_{-\frac{1}{2}} + i\,\underbrace{\sin\tfrac{4\pi}{3}}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\tfrac{1}{2} - i\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

(c) $$z_6 = \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\ .$$

Les nombres complexes z_4 , z_5 et z_6 sont représentés géométriquement à la Figure 6.4.

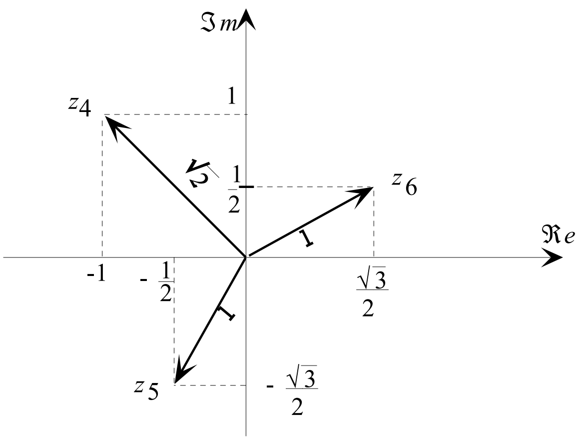


Figure 6.4. Représentation géométrique de
$$\begin{aligned} z_4 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)\ , \\ z_5 &= \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}\ , \\ z_6 &= \cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\ . \end{aligned}$$

4. Addition et multiplication des nombres complexes

4.1 Définitions

L'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies par :

Définition 6.4

$$\boxed{\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= (a+c)+i\ (b+d)\\ (a+ib)(c+id) &= (ac-bd)+i\ (bc+ad)\end{aligned}}$$

ou si on travaille dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par l'identification vue au §3.1 ,

$$\boxed{\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)(c,d) &= (ac-bd,bc+ad)\end{aligned}}$$

Remarques :

- Pour obtenir la somme de deux nombres complexes, il suffit donc d'additionner leurs parties réelles et leurs parties imaginaires. On a :

  $$\begin{aligned}\Re\mathrm{e}\ (z_1+z_2) &= \Re\mathrm{e}\ (z_1)+\Re\mathrm{e}\ (z_2)\ ,\\ \mathrm{Im}(z_1+z_2) &= \mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)\ .\end{aligned}$$

  Ceci permet de comprendre aisément le lien avec la notation en couple :

  $$z=a+bi\equiv(a,b)=(a,0)+(0,b)=a\underbrace{(1,0)}_{\equiv 1}+b\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}\equiv a\cdot 1+bi\ .$$

- Pour obtenir le produit, il suffit de « distribuer » les opérations de multiplication comme suit :

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+iad+ibc+\underbrace{i^2}_{-1}bd \\ &= (ac-bd)+i\ (ad+bc)\end{aligned}$$

Il ne faut pas confondre la multiplication scalaire et la multiplication complexe. Prenons le cas d'un imaginaire pur bi . On peut écrire en multiplication scalaire

$$bi \equiv b(0,1) = (0,b)$$

ou en multiplication complexe :

$$bi \equiv (b,0)\cdot(0,1) = (b\cdot 0 - 0.1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0,b) \ .$$

En particulier,

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) \equiv -1$$

(ce qui est solution de l'équation $x^2+1=0$). Ceci montre bien que la définition 6.4 est concordante avec la définition du nombre imagimaine i (voir Définition 6.1).

Exemples :

- $(2+3i)+(-4+9i) = (2-4)+(3+9)i = -2+12i$.

- $(-1+5i)(9-2i) = -9+2i+45i-10\underbrace{i^2}_{-1} = 1+47i$.

4.2 Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$

- L'**addition** des nombres complexes est :
  - **commutative :** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
  - **associative :** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$

- Il existe un nombre complexe, noté 0 , tel que

$$z + 0 = 0 + z = z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Ce nombre $0 = 0 + 0i$ (c'est le nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont nulles).

- Le nombre $(-a) + i(-b)$ est tel que

$$[(-a) + i(-b)] + [a + ib] = 0 \ .$$

On le note $-(a + ib)$ et il est appelé l'**opposé** de $a + ib$.

- On peut également vérifier que « **le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués** » :

$$\boxed{\text{pour } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \ .}$$

4.3 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$

- La **multiplication** dans les nombres complexes est :
  - **commutative :** $z_1 \ z_2 = z_2 \ z_1 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
  - **associative :** $z_1 \ (z_2 \ z_3) = (z_1 \ z_2) \ z_3 \qquad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$
  - **distributive par rapport à l'addition :**

$$z_1 \ (z_2 + z_3) = z_1 \ z_2 + z_1 \ z_3 \qquad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$$

- Il existe un nombre complexe, noté 1 , tel que

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z \ .$$

Ce nombre $1 = 1 + 0i$ (c'est le nombre complexe dont la partie réelle vaut 1 et la partie imaginaire vaut 0, soit le couple $(1, 0)$).

- Pour tout nombre complexe $a + ib \neq 0$, il existe un nombre complexe $c + id$ tel que

$$(a + ib)(c + id) = 1 \ ,$$

i.e. $zz' = 1$. Le nombre z' est appelé l'**inverse** de z et est noté

$$z' = z^{-1} = \tfrac{1}{z} = \tfrac{1}{a+bi} \ .$$

Pour le déterminer, il suffit d'effectuer le produit $(a + ib)(c + id)$.
On obtient $(ac - bd) + i\ (bc + ad) = 1 + i0$, ce qui donne

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \ , \\ bc + ad = 0 \ . \end{cases}$$

qui est un système de deux équations à deux inconnues c et d , admettant une et une seule solution puisque son déterminant vaut $a^2 + b^2$ qui est non nul (car $a + bi \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$).
En multipliant la première égalité par a , la deuxième par b et en les additionnant, on obtient

$$(a^2 + b^2)\ c = a$$

ce qui donne

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2} \ .$$

On a donc

$$\boxed{z' = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}} \tag{6.2}$$

La formule (6.2) peut également s'écrire

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} & \quad (\ z \in \mathbb{C}\ ,\ z \neq 0\ ) \\[2ex] |z|^2 & = & z\ \overline{z} & \quad (\ z \in \mathbb{C}\ ) \end{array}}$$

- **Le ≪ quotient ≫ de** $z = a + ib$ **par** $w = c + id \neq 0$ est noté $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id}$ et est défini par

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = (a+ib)\ \frac{1}{c+id} = z \cdot w^{-1}$$

ce qui donne, grâce à (4.2)

$$\boxed{\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}\ .} \tag{6.3}$$

Remarquons que l'expression (4.3) est également obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur de la ≪ fraction ≫ $\frac{a+ib}{c+id}$ par $c - id$, le binôme conjugué de $c + id$. On a

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}\ .$$

Ainsi, l'inverse se calcule au moyen de la même astuce :

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\ .$$

- On peut également vérifier que ≪ **le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués** ≫, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{pour } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ .}$$

- **La n-ième puissance d'un nombre complexe** z est définie par

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fois}} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}_0\ , \\ z^0 &= 1 \qquad \text{(convention)} \end{aligned}$$

On a les relations suivantes :

$$\boxed{\text{pour } z \in \mathbb{C}\ ,\ n, p \in \mathbb{N} : \qquad \begin{aligned} z^n\ z^p &= z^{n+p}\ , \\ (z^n)^p &= z^{np}\ . \end{aligned}}$$

4.4 Propriétés du module

Nous démontrerons le théorème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{pour } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : & |z_1\ z_2| & = & |z_1| \cdot |z_2| \ , \\ & \arg(z_1 z_2) & = & \arg\, z_1 + \arg\, z_2 \quad (\text{modulo } \ 2\pi\ ) \ . \end{array}}$$

On démontre de même :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \text{pour } z_1, z_2 \in \mathbb{C} : & \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| & = & \dfrac{|z_1|}{|z_2|} & (\ z_2 \neq 0\ ) \\ & |\overline{z_1}| & = & |z_1| \ , & \\ ! & |z_1 + z_2| & \neq & |z_1| + |z_2| & (\text{en général}) \end{array}}$$

Preuve : on utilisera la forme trigonométrique, soit

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \ , \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ . \end{cases}$$

alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \Big] \\ &= r_1 r_2 \Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \Big] \\ &= r \cdot [\cos\theta + i\sin\theta] \ . \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |z_1| &= r_1 \,, \\ |z_2| &= r_2 \,, \\ |z_1 z_2| &= r = r_1 r_2 \,, \\ \Rightarrow |z_1 z_2| &= |z_1|\,|z_2| \,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \arg z_1 &= \theta_1 \,, \\ \arg z_2 &= \theta_2 \,, \\ \arg z_1 z_2 &= \theta = \theta_1 + \theta_2 \,, && (\text{modulo } 2\pi) \,, \\ \Rightarrow \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 && (\text{modulo } 2\pi) \,. \blacksquare \end{aligned}$$

Dans la suite, on verra l'utilité d'une forme exponentielle, notamment pour éviter ce genre de démonstration.
Cette démonstration nous permet de démontrer également le théorème suivant :

Si	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$n \in I\!N_0$,
alors	$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.	

Preuve par récurrence :

a) Montrons que cette relation est vraie pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} z^n = z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{(par hypothèse)} \\ &= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \,. \end{aligned}$$

b) Supposons que la relation soit vraie pour n , et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$: on suppose que

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \,,$$

alors

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n \cdot z &= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{n+1} \cdot (\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)) \end{aligned}$$

par le théorème précédent. ■

4.5 Corps des complexes

En résumé, nous pouvons citer le théorème suivant :

Les nombres complexes $\mathbb{C}$ forment un corps (commutatif) avec les propriétés suivantes pour $z, w, s \in \mathbb{C}$:

Addition :

$$\begin{aligned} z + w &= w + z \,, \\ z + (w + s) &= (z + w) + s \,, \\ z + 0 &= z \,, \\ z + (-z) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Multiplication :

$$\begin{aligned} zw &= wz \,, \\ (zw)s &= z(ws) \,, \\ z \cdot 1 &= z \,, \\ z(z^{-1}) &= 1 \qquad \textit{pour } z \neq 0 \,. \end{aligned}$$

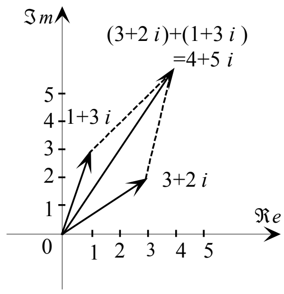
Distributivité :

$$z(w + s) = zw + zs \,.$$

et la **multiplication scalaire** *(par un nombre réel).*

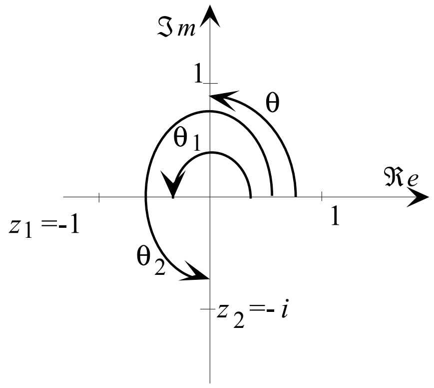
4.6 Exemples d'utilisation des opérations dans $\mathbb{C}$

1. Interprétation géométrique de la somme (de deux nombres complexes) :



Règle du parallélogramme (pour l'addition de deux vecteurs)

2. Interprétation géométrique du produit (de deux nombres complexes) : $z_1 = -1$ et $z_2 = -i$:



$$\begin{cases} \theta_1 = \arg\ z_1 = \pi\ , \\ \theta_2 = \arg\ z_2 = 3\pi/2\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} |z_1| = 1\ , \\ |z_2| = 1\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_1| \cdot |z_2| = 1\ , \\ \arg\ z_1 + \arg\ z_2 = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\ , \end{cases}$$

$$z_1\ z_2 = (-1)(-i) = i\ ,$$

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = 1\ , \\ \arg(z_1 z_2) = \theta = \frac{\pi}{2}\ , \end{cases}$$

$$\arg\ z_1 + \arg\ z_2 = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \arg(z_1 z_2) + 2\pi\ ,$$

$$\arg\ z_1 + \arg\ z_2 = \arg(z_1 z_2) \qquad \text{(modulo } 2\pi\text{)}\ .$$

3. $(3 - i\sqrt{5})(4 - 2i\sqrt{5}) = 12 - 6i\sqrt{5} - 4i\sqrt{5} + 2i^2(\sqrt{5})^2 = 2 - 10i\sqrt{5}$

4. $\dfrac{1+i}{2+i} = \dfrac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+2i-i^2}{4-i^2} = \dfrac{3+i}{5}$

5. $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = [1+2i+i^2]^2 = [2i]^2 = 4i^2 = -4$

6. $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

7. Calculer $|z|$, $\Re\mathrm{e}\,(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ lorsque

$$z = \frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{z_3} \,, \qquad z_1 = 1+i \,,\ z_2 = 2-3i \,,\ z_3 = -5+4i \,.$$

- Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de calculer $\Re\mathrm{e}\,(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ pour évaluer $|z|$. On a en effet :

$$|z| = \frac{|z_1|\cdot|z_3|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{41}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{82}{13}} \,.$$

- $z = \dfrac{(1+i)(-5-4i)}{2-3i} = \dfrac{-1-9i}{2-3i} = \dfrac{(-1-9i)(2+3i)}{13} = \dfrac{25-21i}{13}$,

  ce qui donne : $\Re\mathrm{e}\,(z) = \frac{25}{13}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{-21}{13}$.

8. $\dfrac{1+i}{(1-i)^2} = \dfrac{1+i}{1-2i+i^2} = \dfrac{1+i}{-2i} = \dfrac{(1+i)\,i}{-2i^2} = \dfrac{i+i^2}{2} = \dfrac{-1+i}{2}$

9.
$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} &= \frac{1+3i^2+3i+i^3}{[(1+i\sqrt{3})^2]^2} = \frac{-2+2i}{[-2+2i\sqrt{3}]^2} \\
&= \frac{-2+2i}{-8-8i\sqrt{3}} = \frac{1-i}{4+4i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{4(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}{4(1-3i^2)} = \frac{1-\sqrt{3}}{16} - i\frac{1+\sqrt{3}}{16}
\end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned}
\left[\frac{i(i-1)}{5+i}\right]^2 &= \left[\frac{-1-i}{5+i}\right]^2 = \left[\frac{(-1-i)(5-i)}{25-i^2}\right]^2 \\
&= \left[\frac{-6-4i}{26}\right]^2 = \left[\frac{-3-2i}{13}\right]^2 = \frac{5+12i}{169}
\end{aligned}$$

5. Forme exponentielle des nombres complexes

5.1 L'expression $e^{i\theta}$ ($\theta \in I\!R$)

La fonction exponentielle e^x ($x \in I\!R$) peut s'écrire au moyen de la série de Mac Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Par analogie, on construit $e^{i\theta}$ ($\theta \in I\!R$) formellement comme suit :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots \\ &= 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \ldots + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} i^2 &= i^6 = i^{10} = \ldots = -1\ , \\ i^4 &= i^8 = i^{12} = \ldots = 1\ , \\ i^3 &= i^7 = i^{11} = \ldots = -i\ , \\ i^5 &= i^9 = i^{13} = \ldots = i\ , \end{aligned}$$

on obtient

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots}_{= \cos\theta} + i\ \underbrace{\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right]}_{= \sin\theta}$$

On reconnaît dans cette expression les séries de Taylor de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 6.5

$$\boxed{\text{Pour } \theta \in I\!R : \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta\ .}$$

Le nombre complexe $e^{i\theta}$ possède les propriétés suivantes :

Pour $\theta, \theta_1, \theta_2 \in I\!R$:

- $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ pour $n \in I\!N$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
- $|e^{i\theta}| = 1 = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$
  Le nombre complexe $e^{i\theta}$ est dit **unimodulaire**.
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Remarquez que les nombres de la forme $e^{i\theta}$ se manipulent comme des exponentielles dont la variable est réelle.

5.2 Les trois formes d'un nombre complexe

$$z = \underbrace{a + ib}_{\substack{\text{forme}\\ \text{algébrique}}} = \underbrace{r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\substack{\text{forme}\\ \text{trigonométrique}}} = \underbrace{r\,e^{i\theta}}_{\substack{\text{forme}\\ \text{exponentielle}}}$$

où $r = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$.

5.3 Utilité de la forme exponentielle

La forme exponentielle des nombres complexes permet d'effectuer très facilement les opérations de conjugaison, multiplication, division. Elle fournit également une interprétation géométrique immédiate de ces opérations.

• Produit et quotient de deux nombres complexes

Soient $z_1 = r_1\ e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2\ e^{i\theta_2}$.
On a

(1) $z_1\ z_2 = r_1\ r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Le **produit** de deux nombres complexes est le nombre complexe dont

1. le **module** est le **produit** des modules des deux nombres ;
2. l'**argument** est la **somme** des arguments des deux nombres (modulo 2π).

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Le **quotient** de deux nombres complexes est le nombre complexe dont

1. le **module** est le **quotient** des modules des deux nombres ;
2. l'**argument** est la **différence** des arguments des deux nombres (modulo 2π).

L'interprétation géométrique de ces opérations est donnée aux Figures 6.5 et 6.6.

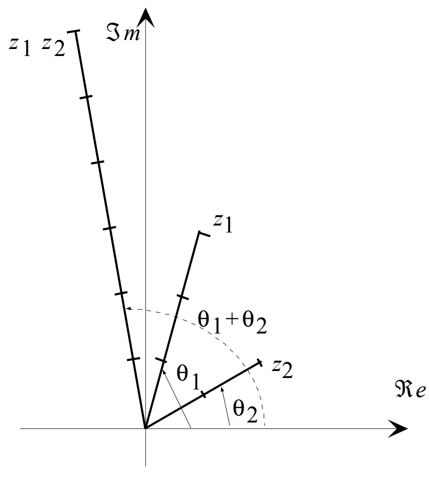


Figure 6.5. Produit de deux nombres complexes.

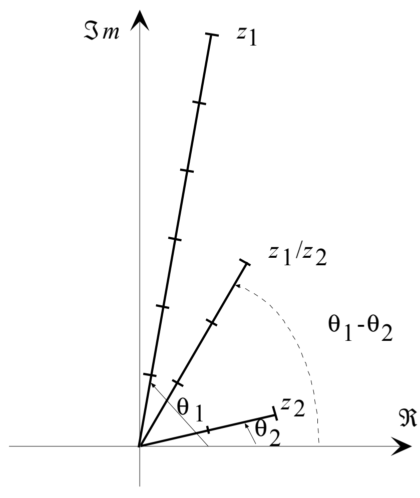


Figure 6.6. Quotient de deux nombres complexes.

- **Puissance d'un nombre complexe**

Soient $z = r\ e^{i\theta}$ et $n \in I\!N_0$.
On a
$$z^n = r^n\ e^{in\theta}\ .$$

1. Le **module** de z^n est égal à $|z|^n$.
2. L'**argument** de z^n est l'argument de z multiplié par n (modulo 2π) .

- **Conjugué d'un nombre complexe**

Soit $z = r\ e^{i\theta}$.
On a
$$\overline{z} = r\ e^{-i\theta}\ .$$

1. Le **module** de $\overline{z}$ est le module de z .
2. L'**argument** de $\overline{z}$ est l'opposé de l'argument de z (modulo 2π) .

L'interprétation géométrique du conjugué est donnée à la Figure 6.7.

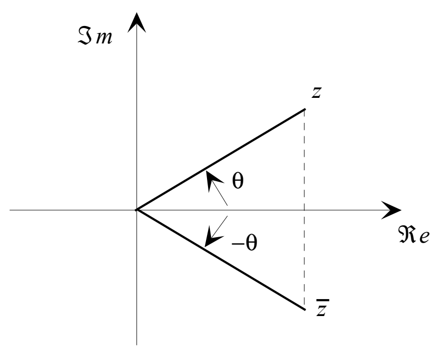


Figure 6.7. Conjugué d'un nombre complexe.

- **Égalité de deux nombres complexes**

Considérons les nombres complexes z_1 et z_2 écrits sous forme exponentielle :

$$z_1 = r_1\, e^{i\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$$

avec $r_1, r_2 \geq 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in I\!R$. La représentation géométrique décrite à la Figure 6.1 permet de voir que

$$\boxed{r_1\, e^{i\theta_1} = r_2\, e^{i\theta_2} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \quad \text{et} \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad (\, k \in Z\!\!Z \,). \end{cases}}$$

Deux nombres complexes sont donc égaux si et seulement si ils ont le même module et si leurs arguments respectifs diffèrent d'un multiple de 2π .

- **Exercice** : que devient l'argument d'un nombre complexe lorsqu'on multiplie ce dernier par i ?

Solution : soit $z = r\, e^{i\theta}$. On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Par conséquent, $iz = r\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$ et donc,

$$\arg(iz) = \arg(z) + \tfrac{\pi}{2} \cdot$$

6. Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 6.6

Le nombre complexe u est **racine carrée** du nombre complexe $z \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = z$.

Le calcul des racines carrées d'un nombre complexe montre l'utilité de la forme exponentielle. Utilisons tout d'abord la forme algébrique

$$z = a + ib$$

et calculons ses racines carrées, ensuite nous passerons à la forme exponentielle.
Soit donc $\quad z = a + ib$.
On cherche $\quad u = x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = a + bi$

$$\text{i.e.} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \ ,$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

La solution de ce système se trouve en élevant au carré les deux équations et en les additionnant :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2) &= \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & \text{par } (1) + (3) \\[2ex] y^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & \text{par } -(1) + (3) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} \quad x = -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \ , \\[3ex] y = \sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} \quad y = -\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \ , \end{cases}$$

où les signes de x et y seront déterminés par (2) :

$$\text{si } b \geq 0 : \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \qquad (\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe})$$

$$\text{si } b < 0 : \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad (\ x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé})$$

Nous allons maintenant utiliser la forme exponentielle pour le calcul des racines carrées du nombre complexe z .

Écrivons les nombres complexes z et u sous forme exponentielle :

$$z = r\ e^{i\theta} \quad \text{et} \quad u = \rho\ e^{i\alpha}\ .$$

Le nombre complexe u est racine carrée du nombre complexe z si et seulement si

$$\rho^2\ e^{2i\alpha} = r\ e^{i\theta}\ ,$$

ce qui est équivalent à $\rho^2 = r$ et $2\alpha = \theta + 2k\pi \quad (\ k \in \mathbb{Z}\ )$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r} & \text{(la quantité } \rho \text{ est le module de } u \text{ , elle doit donc être } \geq 0\ ) \\ \text{et} \quad \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi & (\ k \in \mathbb{Z}\ ). \end{cases}$$

On a donc

$$u = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)} \qquad (\ k \in \mathbb{Z}\ ).$$

En faisant varier k dans $\mathbb{Z}$, on obtient les différentes racines carrées u_k de z , à savoir

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} &&= \sqrt{r}\ \left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i \sin\tfrac{\theta}{2}\right) \\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad u_1 = \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} &&= \sqrt{r}\ \Big[\underbrace{\cos\left(\tfrac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\cos\frac{\theta}{2}} + i \underbrace{\sin\left(\tfrac{\theta}{2}+\pi\right)}_{-\sin\frac{\theta}{2}}\Big] \\
& &&= -\sqrt{r}\Big[\cos\tfrac{\theta}{2} + i \sin\tfrac{\theta}{2}\Big] \\
& &&= -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\
& &&= -u_0
\end{aligned}$$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad u_2=\sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+2\pi\right)} = \sqrt{r}\ \Big[\underbrace{\cos\Big(\frac{\theta}{2}+2\pi\Big)}_{\cos\frac{\theta}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}+2\pi\right)}_{\sin\frac{\theta}{2}}\Big]$$

$$= r\Big[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\Big]$$

$$= \sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= u_0$$

$$k=3 \quad \Rightarrow \quad u_3=\sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+3\pi\right)} = \sqrt{r}\ \Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}+3\pi\right)}_{-\cos\frac{\theta}{2}} + i\underbrace{\sin\Big(\frac{\theta}{2}+3\pi\Big)}_{-\sin\frac{\theta}{2}}\Big]$$

$$= -\sqrt{r}\Big[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\Big]$$

$$= -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= -u_0\ .$$

On remarque que les valeurs successives $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ conduisent à deux nombres complexes distincts :

$$\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ .$$

Le lecteur peut vérifier qu'il en va de même pour les valeurs négatives de k , à savoir $k = -1, -2, -3, \cdots$.

En conclusion,

Le nombre complexe $z = r\ e^{i\theta}$ ($r \geq 0$) possède deux racines carrées, à savoir

$$\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ .$$

Exercice 1 :

> Calculer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ et écrire celles-ci sous les trois formes exponentielle, trigonométrique et algébrique.

Pour calculer ses racines carrées, nous allons tout d'abord écrire z sous la forme exponentielle.

1. $|z| = \sqrt{4} = 2$
2. $\arg(z) = \theta$ donné par $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   On a donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Le nombre $z = 1 + i\sqrt{3}$ s'écrit donc $z = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ses racines carrées sont donc

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ u_1 &= \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ . \end{aligned}$$

Exercice 2 :

> Calculer les racines carrées de $z = -1$.

On a $z = e^{i\pi}$. Ses racines carrées sont donc $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.
Les deux racines carrées de -1 sont $+i$ et $-i$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe :

Soient $w \in \mathbb{C}$ ($w \neq 0$) ayant la représentation trigonométrique ou polaire $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Alors w possède n racines n-ièmes données par $$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \ , \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$ telles que $z_k^n = w$.

Preuve : Ceci revient donc à résoudre l'équation $z^n = w$ avec

$$\begin{aligned} w &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \ , \\ z &= \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \ . \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) \ = \ w \ = \ r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \Leftrightarrow & \quad \begin{cases} \rho^n = r & (\ r > 0 \ ) \\ n\phi = \theta & (\text{ modulo } 2\pi \ ) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\phi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{pour } k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des fonctions périodiques de période 2π . ∎

Exemples :

1. Solution de $z^3 = 1$: $z = 1$, $-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2$, $-\frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$
2. Les huit racines 8-ièmes de l'unité sont solutions de $z^8 = 1$.

7. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

$(\ a, b, c \in I\!R\ ,\ a \neq 0\ )$

Nous avons montré, au §1, que cette équation était équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\ .$$

Le cas $b^2 - 4ac \geq 0$ a été traité au §1. Nous nous intéressons donc au cas $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$.
L'équation peut s'écrire

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}_{\text{nombre réel } > 0}\ .$$

ou encore

$$\left[\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\right]^2 = -1\ .$$

Ceci montre que la quantité entre crochets est une racine carrée de -1 , c'est-à-dire vaut i ou $-i$.

On obtient finalement :

> Les racines de l'équation à coefficients réels $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) sont données par
>
> - si $b^2 - 4ac \geq 0$: $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
> - si $b^2 - 4ac < 0$: $\quad x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.
>   On obtient dans ce cas deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

Exemple : soit à calculer les racines de $3x^2 - 7x + 10 = 0$.
La quantité $b^2 - 4ac = -71 < 0$.
Les racines sont $\dfrac{7 + i\sqrt{71}}{6}$ et $\dfrac{7 - i\sqrt{71}}{6}$.

8. Exercices

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

   (a) $z = 2 - 10i$;
   (b) $z = 8 + 9i$;
   (c) $z = \overline{2 - 4i}$;
   (d) z tel que $\overline{z} = 2 + i$.

2. Déterminer les nombres réels x et y satisfaisant à :

   (a) $x + iy = 5 - 8i$;
   (b) $\overline{x + iy} = 2 - i$;
   (c) $x + iy = \overline{9 - i}$;
   (d) $x + iy = 2 + 10i$.

3. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme trigonométrique :

   (a) $1 - i$;
   (b) $-1 - i$;
   (c) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$;
   (d) $-2 + 0 \cdot i$;
   (e) $-1 - i\sqrt{3}$;
   (f) $-\sqrt{3} + 3i$;
   (g) $0 + 5i$;
   (h) $4 - 4i$;
   (i) $2 + 2i$.

4. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants et les écrire sous la forme algébrique :

   (a) $\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$;
   (b) $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$;
   (c) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
   (d) $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$;
   (e) $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$;
   (f) $2\left(\cos 3\pi + i \sin 3\pi\right)$.

5. Soient $x, a, b \in I\!R$. Effectuer les opérations suivantes :

(a) $-2i\ (2+i)$;

(b) $(2+3i)\ (3+2i)$;

(c) $(-7+i)\ (7+i)$;

(d) $(\sqrt{3}-i\sqrt{5})\ (\sqrt{3}+i\sqrt{5})$;

(e) $(-2+7i)\ (-2-7i)$;

(f) $(x-a+bi)\ (x-a-bi)$;

(g) $\dfrac{9-i}{i}$;

(h) $\dfrac{3}{6-5i}$;

(i) $\dfrac{a+bi}{b-ai}$;

(j) $\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{a-bi}{a+bi}$.

6. Soit $x \in I\!R$. Effectuer les opérations suivantes :

(a) $\dfrac{(2+i)(5-i)(2-i)}{3+2i}$;

(b) $\dfrac{(4+i)\overline{(5-i)}}{(3+i)(-1+i)}$;

(c) $\dfrac{(x-i)(3+2i)}{i(x+i)}$;

(d) $\overline{\left[\dfrac{(2-3i)(5+2i)}{(3-2i)(4+i)}\right]}$.

7. Déterminer le module des nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{(1-i)\overline{(2+i)}}{4-i}$;

(b) $\dfrac{1-2i}{i}$;

(c) $\dfrac{1+5i}{3+i}-\dfrac{2-i}{i}$;

(d) $(3+i)\left[(5-2i)+\dfrac{i}{i+1}\right]$.

8. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(1+i)^5$;

(b) $(1-2i)^2\overline{(1+i)}$;

(c) $\dfrac{(5+i)(3-i)}{1-i}$;

(d) $\dfrac{(1-3i)^3}{(2+i)^2}$;

(e) $\dfrac{1+3i}{\overline{(1-i)}}+\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$.

9. Écrire chacun des nombres complexes de l'exercice 3 sous la forme exponentielle.

10. Utiliser la forme exponentielle pour évaluer :

$$\text{(a)}\quad \frac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3}\,, \qquad \text{(b)}\quad \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}\,, \qquad \text{(c)}\quad (1-i)^3\,.$$

11. Que deviennent le module et l'argument d'un nombre complexe z lorsqu'on multiplie ce dernier par :

$$\text{(a)}\quad -i\,, \qquad \text{(b)}\quad 3i\,, \qquad \text{(c)}\quad \sqrt{3}+i\,, \qquad \text{(d)}\quad -1+i\,.$$

12. Écrire sous la forme algébrique :

(a) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$;

(b) $\left[3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^3$;

(c) $\left(-3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$;

(d) $\left(2\,e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^3$.

13. Représenter géométriquement chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(-i)^2$;

(b) $(-i)^3$;

(c) $(2i)^2$;

(d) $(1+i)^3$;

(e) $(1+i\sqrt{3})^4$;

(f) $(-1+2i)^3$.

14. Déterminer les racines carrées de :

$$\text{(a)}\quad 2i\,, \qquad \text{(b)}\quad -4i\,, \qquad \text{(c)}\quad 1-i\sqrt{3}\,.$$

15. Calculer les racines des équations suivantes :

(a) $x^2-2x+2=0$;

(b) $x^2+x+1=0$;

(c) $x^4-8x^2-9=0$;

(d) $x^4+6x^2+25=0$;

(e) $x^4+10x^2+169=0$;

(f) $16x^2+24x+5=0$.

16. Calculer toutes les valeurs de $1^{1/m}$ où m est un entier > 0 .

17. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation
$$(z+1)^{2n+2} = 1$$
où n est un entier > 0 .

18. Calculer toutes les valeurs de
(a) $(1+i\sqrt{3})^{1/5}$;
(b) $(-1-i\sqrt{3})^{-1/3}$;
(c) $(1-i)^{-1/3}$;
(d) $(-\sqrt{3}-i)^{-5}$.

19. Soit $\dfrac{x-iy}{x+iy} = a+ib$.
Calculer a^2+b^2 .

20. Résoudre les équations suivantes : $z^3 = 8$; $z^4 = 1-i$; $z^3 = 5-3i$.

21. Déterminer $(1-i\sqrt{3})^{10}$, $(2+i)^3$; $(3-4i)^5$; $(2+2i)^4$.

22. Déterminer
- $(-16)^{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire résoudre $z^4 = -16$;
- $(100)^{\frac{1}{10}}$, c'est-à-dire résoudre $z^{10} = 100$.

23. Exprimer
- $\sin 4\theta$, en termes de puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$;
- $\cos 6\theta$, en termes de puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$;
- $\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta}$, en termes de puissances de $\sin\theta$.

24. Soit $z \in \mathbb{C}$; Prouver que
(a) $\Re\mathrm{e}\,(iz) = -\,\mathrm{Im}\,z$;
(b) $\mathrm{Im}(iz) = \Re\mathrm{e}\ z$;
(c) $\Re\mathrm{e}\,(z^2) = (\Re\mathrm{e}\ z)^2 - (\mathrm{Im}\,z)^2$;
(d) $\mathrm{Im}(z^2) == 2(\Re\mathrm{e}\ z)(\mathrm{Im}\,z)$.

25. Laquelle des affirmations suivantes est vraie pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
(a) $\Re\mathrm{e}\,(z_1+z_2) = \Re\mathrm{e}\ z_1 + \Re\mathrm{e}\ z_2$;

(b) $\Re\mathrm{e}\,(z_1z_2) = (\Re\mathrm{e}\,z_1)(\Re\mathrm{e}\,z_2)\,;$

(c) $\Re\mathrm{e}\,(\alpha z_1) = \alpha\,\Re\mathrm{e}\,z_1 \quad$ où $\alpha \in I\!R\,;$

(d) $\mathrm{Im}(z_1 - z_2) = -\,\mathrm{Im}(z_2 - z_1)\,;$

(e) $\mathrm{Im}[(z_1 + z_2)^2] = -\,\mathrm{Im}[(z_1 - z_2)^2]\ .$

26. Soit $n \in I\!N$. Montrer que $i^{n+4} = i^n$.
Utiliser ce résultat pour évaluer i^{12735} et $(1+i)^{3074}$.
Note : calculer d'abord $(1+i)^2$.

27. Résoudre les équations suivantes en x et y où $x, y \in I\!R$.

(a) $i(x+iy) = x + 1 + 2iy\,;$

(b) $x^2 - y^2 + i2xy = -ix + y\,;$

(c) $(x+iy)^2 = i\,;$

(d) $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - 2x + iy\,;$

(e) $\sin(e^x) + i\cos x = 1 + i\sin y\ .$

9. Solutions des exercices

1. (a) $\Re\mathrm{e}\,(z) = 2\ , \quad \mathrm{Im}(z) = -10\,;$

(b) $\Re\mathrm{e}\,(z) = 8\ , \quad \mathrm{Im}(z) = 9\,;$

(c) $\Re\mathrm{e}\,(z) = 2\ , \quad \mathrm{Im}(z) = 4\,;$

(d) $\Re\mathrm{e}\,(z) = 2\ , \quad \mathrm{Im}(z) = -1\ .$

2. (a) $x = 5\ , \quad y = -8\,;$

(b) $x = 2\ , \quad y = 1\,;$

(c) $x = 9\ , \quad y = 1\,;$

(d) $x = 2\ , \quad y = 10\ .$

3. (a) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

   (b) $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

   (c) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

   (d) $-2 + i\ 0 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$;

   (e) $-1 - i\sqrt{3} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

   (f) $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

   (g) $0 + 5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

   (h) $4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

   (i) $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

4. (a) $\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$;

   (b) $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$;

   (c) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

   (d) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

   (e) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

   (f) $2\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right) = -2$.

5. (a) $-2i\ (2+i) = 2-4i\,;$

(b) $(2+3i)\ (3+2i) = 13i\,;$

(c) $(-7+i)\ (7+i) = -50\,;$

(d) $(\sqrt{3}-i\sqrt{5})\ (\sqrt{3}+i\sqrt{5}) = 8\,;$

(e) $(-2+7i)\ (-2-7i) = 53\,;$

(f) $(x-a+bi)\ (x-a-bi)$
$= (x-a)^2 + b^2\,;$

(g) $\dfrac{9-i}{i} = -1-9i\,;$

(h) $\dfrac{3}{6-5i} = \dfrac{18}{61} + \dfrac{15}{61}\ i\,;$

(i) $\dfrac{a+bi}{b-ai} = i\,;$

(j) $\dfrac{a+bi}{a-bi} + \dfrac{a-bi}{a+bi}$
$= 2\ \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ .$

6. (a) $\dfrac{(2+i)(5-i)(2-i)}{3+2i} = 5(1-i)\,;$

(b) $\dfrac{(4+i)\overline{(5-i)}}{(3+i)(-1+i)} = -\dfrac{29}{10} - \dfrac{37}{10}\ i\,;$

(c) $\dfrac{(x-i)(3+2i)}{i(x+i)} = \dfrac{1}{1+x^2}\ \left[-2(-x^2+3x+1) + i(-3x^2-4x+3)\right];$

(d) $\overline{\left[\dfrac{(2-3i)(5+2i)}{(3-2i)(4+i)}\right]} = \dfrac{279}{221} + i\ \dfrac{74}{221}\ .$

7. (a) $\left|\dfrac{(1-i)\overline{(2+i)}}{4-i}\right| = \sqrt{\dfrac{10}{17}}\,;$

(b) $\left|\dfrac{1-2i}{i}\right| = \sqrt{5}\,;$

(c) $\left|\dfrac{1+5i}{3+i} - \dfrac{2-i}{i}\right| = \sqrt{\dfrac{74}{5}}\,;$

(d) $\left|(3+i)\left[(5-2i) + \dfrac{i}{i+1}\right]\right| = 5\sqrt{13}\,.$

8. (a) $(1+i)^5 = -4-4i\,;$

(b) $(1-2i)^2\overline{(1+i)} = -7-i\,;$

(c) $\dfrac{(5+i)(3-i)}{1-i} = 9+7i\,;$

(d) $\dfrac{(1-3i)^3}{(2+i)^2} = \dfrac{2}{25}\ (-3+79i)\,;$

(e) $\dfrac{\overline{1+3i}}{\overline{(1-i)}} + \dfrac{1+i}{(1-i)^2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i\ .$

10. (a) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = 2^3(\sqrt{3}+i)\,;$

(b) $\dfrac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ e^{-i\ \frac{7\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ e^{i\ \frac{17\pi}{12}}\,;$

(c) $(1-i)^3 = -2(1+i)\ .$

11. (a) $\arg(-iz) = \arg(z) + \frac{3\pi}{2}$, $|-iz| = |z|$,

(b) $\arg(3iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2}$, $|3iz| = 3|z|$,

(c) $\arg[(\sqrt{3}+i)z] = \arg(z) + \frac{\pi}{6}$, $|(\sqrt{3}+i)z| = 2|z|$,

(d) $\arg[(-1+i)z] = \arg(z) + \frac{3\pi}{4}$, $|(-1+i)z| = \sqrt{2}|z|$.

12. (a) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 = -16\sqrt{2}(1+i)\,;$

(b) $\left[3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^3 = \frac{27}{2}\ \sqrt{2}(1+i)\,;$

(c) $\left(-3\ e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = -\frac{9}{2} + i\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\,;$

(d) $\left(2\ e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = 8i\ .$

14. (a) $1+i$ et $-1-i\,;$

(b) $\sqrt{2}(-1+i)$ et $\sqrt{2}(1-i)\,;$

(c) $-\sqrt{\frac{3}{2}} + i\ \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} - i\ \sqrt{\frac{1}{2}}\ .$

15. (a) $1+i$ et $1-i\,;$

(b) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;$

(c) $3\,,\quad -3\,,\quad i\quad$ et $\quad -i\,.$

19. $$\frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{-2xy}{x^2+y^2} =: a+ib$$

$$a^2+b^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\left[(x^2-y^2)^2+(-2xy)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\underbrace{\left[x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2\right]}_{\substack{=x^4+y^4+2x^2y^2\\ =(x^2+y^2)^2}} = 1\,.$$